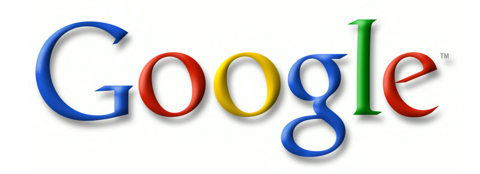
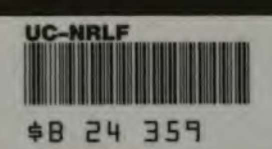



UC-NRLF
$B 24 359

Über die Genauigkeit der galvanometrischen Methoden zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes von galvanischen Elementen

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Marburg

vorgelegt von

C. Seargent



MARBURG
Buchdruckerei Heinrich Bauer
1903

Angenommen von der Philosophischen Fakultät Marburg
am 8. November 1902
Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät
Referent: Herr Professor Dr. Richarz

I. Einleitung.

§ 1.

Für die genauere Untersuchung der elektromotorischen Kraft und des inneren Widerstandes eines Elementes sind zahlreiche Methoden angegeben.

Wegen der Aenderung der zu messenden Grössen während des Versuches lässt die Genauigkeit dieser Methoden gewöhnlich sehr viel zu wünschen übrig. Besonders bei der Bestimmung von sehr kleinen inneren Widerständen, z. B. bei Akkumulatoren, und bei nicht konstanter elektromotorischer Kraft ist dies der Fall.

Auf Anregung des Herrn Prof. Feussner stellte ich mir die Aufgabe, die Genauigkeit der einzelnen Methoden theoretisch zu untersuchen und praktisch zu konstatieren, und die Bedingungen zu finden für zuverlässige Resultate in den verschiedenen Fällen. Insbesondere sollen Methoden berücksichtigt werden, die uns gestatten elektromotorische Kraft und Widerstand bei verschiedenen Stromstärken zu messen.

§ 2.

Für die *Vergleichung der elektromotorischen Kraft* bezw. für die absolute Messung derselben, lassen sich die verschiedenen Verfahren in drei Hauptgruppen einteilen:

a) Elektrometrische Methoden,
b) Kompensations-Methoden,
c) Strommethoden.

In dieser Abhandlung werden die Methoden b und c hauptsächlich behandelt.

Die elektrometrischen Methoden setzen ein sehr empfindliches Elektrometer voraus und sind zu Bestimmungen bei gegebener Stromstärke nicht gut geeignet.

Streintz[1]) verglich diese Methoden mit den Kompensationsmethoden, und nach seinen Resultaten sollen die elektrometrischen Methoden einen Vorteil haben. Dagegen hat v. Uljanin[2]) bessere Resultate mit der Kompensations-Methode erhalten.

In der Gruppe b bleibt das Element stromlos, und eine Vergleichung unter gegebener Stromstärke ist nur zu machen, wenn man das kompensierende statt des kompensierten misst.

Unter c gehören solche Methoden, bei denen das Element durch zwei verschiedene Widerstände geschlossen wird; d. h. die Widerstände werden geändert, bis in einem bestimmten Zweige kein Strom vorhanden ist, und danach Gleichgewicht hervorgebracht durch Zuschaltung von anderen Widerständen: oder die Stromstärke in einem bestimmten Zweige wird bei Einschaltung verschiedener Widerstände gemessen. Nun ist die Bestimmung einer Grösse durch zwei zeitlich verschiedene Messungen nur zulässig, wenn die zu bestimmende Grösse konstant ist. Solche Methoden sind deshalb im Allgemeinen nur bei konstanten Elementen zu verwenden. Streng genommen ist aber ein konstantes Element kaum zu finden; unten wird besprochen, wie man diese Methoden bei inkonstanter elektromotorischer Kraft benutzen kann.

Selbst bei Daniellschen Elementen und bei Akkumulatoren, die schon in einem Stromkreis von konstantem Widerstand

1) Wien. Ber. (2) 77. 1878.
2) Wied. Ann. 27. 657. 1886.

einige Stunden geschlossen worden sind, ist die elektromotorische Kraft immer noch nicht konstant geworden.

Auch durch die für die zweite Beobachtung notwendige Zuschaltung von Widerständen kann eine Aenderung eintreten, besonders wenn die zugeschalteten Widerstände mehr als ein sehr kleiner Bruchteil des in dem Stromkreis schon vorhandenen Widerstands sind.

Daher wird es gewöhnlich empfohlen, solche Messungen bei kleinen Widerständen gänzlich zu vermeiden.

Eine Methode, die auf zwei solchen Beobachtungen beruht, muss also gestatten: erstens, einen beliebig kleinen Widerstand zuzuschalten und die Störung des Gleichgewichts deutlich zu beobachten, und zweitens, die zwei Bestimmungen sehr schnell hintereinander zu machen.

§ 3.

Die hauptsächlichsten bisher empfohlenen Methoden zur Bestimmung der elektromotorischen Kraft sind in Folgendem chronologisch angegeben:

1. Ohm, Schweiggers Journ. LVIII, 1830.
2. Fechner, Lehrbuch des Galvanismus, 1829. — Massbestimmungen der galv. Kette, 1831.
3. Wheatstone, Phil. Trans., 1834. — Pogg. Ann. LXII.
4. Poggendorf, Pogg. Ann. LIV, 1841.
5. Bosscha, Pogg. Ann. XCIV, 1855.
6. Du Bois Reymond, Abhand. der Berl. Akad. 1862; siehe auch Pellet, Ann. Chim. Phys., 1881.
7. v. Waltenhofen, Dingl. Polyt. Journ., 1864.
8. Hoorweg, Pogg. Ann. CXXVII, 1866.
9. Feussner, Marb. Dissert., 1867.
10. Regnauld, Ann. der Chem. und Phys., III. Serie, XLIV, 1854.
11. Fuchs, Wied. Ann. XI, 1884.
12. Raoult, Ann. de Chim. et Phys. (4) 2. 330, 1884.

13. Latimer Clark, J. of Telegr., 1873.
14. Rayleigh, Trans. Roy. Soc., 1884.
15. Cahart, Sill. Journ., 1884.

§ 4.

Zur Bestimmung des Widerstands sind die älteren Methoden ganz unbrauchbar, da vorausgesetzt wird, dass der Widerstand und die elektromotorische Kraft des untersuchten Elements konstant, und von der Stromstärke unabhängig sind. Dass dies aber nicht der Fall ist, haben v. Waltenhofen[1]), Uppenborn[2]) und Frölich[3]) nachgewiesen, und Greeff[4]) konstatierte dasselbe und stellte den Widerstand als Funktion der Stromstärke dar. Auch hier sind Methoden, die auf zwei Beobachtungen beruhen möglichst, zu vermeiden, sowohl wegen der Aenderung in der elektromotorischen Kraft, als im Widerstand, wenn ein langer Schluss des Elements erfordert wird. Selbst bei konstantem Strom ist die zeitliche Aenderung in dem inneren Widerstand sehr bedeutend. Greeff[5]) fand z. B. eine Abnahme von 20 °/₀ innerhalb einiger Stunden bei Zersetzungszellen. Die angegebenen Methoden zur Bestimmung des inneren Widerstands sind hauptsächlich folgende:

1. Ohm, Die galv. Kette, 1827.
2. Whealtstone, Phil. Trans., 1843.
3. Feussner, Marb. Dissert., 1867.
4. v. Waltenhofen, Pogg. Ann., 134, 1868.
5. Paalzow, Pogg. Ann., 135, 1868.
6. Beetz, Ber. d. Münch. Akad., 1871.
7. Mance, Proc. Roy. Soc., 1871; siehe auch Lodge, Phil. Mag., 1877.

1) Pogg. Ann. LIV, 1841.
2) Elektrotech. Z. 12, 1891.
3) Elektrotech. Z. 12, 1891.
4) Marburg. Dissert., 1895.
5) loc. cit., S. 27.

8. Siemens, Pogg. Ann., Jubelband, 1874.
9. Monton, Journ. de Phys., 1876.
10. Peirce, Beibl. 1, 167, 1877. — Proc. Amer. Acad. 141, IV.
11. Discher, Schlöm. Zeitschrift, 1878.
12. Coodrich, Beibl. 3, 329, 1879.
13. Kohlrausch, Wied. Ann., 11, 1880.
14. Fuchs, Wied. Ann., 21, 1884.
15. Lang, Wied. Ann., 26, 1886.
16. Fröhlich, Elektrot. Z., 9, 1888.
17. Uppenborn, Elektrot. Z., 12, 1891.
18. Greeff, Marb. Diss., 1895.

Die meisten obenerwähnten Methoden verlangen zwei Beobachtungen, und setzen dabei eine konstante elektromotorische Kraft voraus, und mehrere dieser Methoden machen auf Genauigkeit sehr wenig Anspruch. Die Methoden von Kohlrausch, Uppenborn und Fröhlich sind Wechselstrommethoden. Diese bieten den Vorteil dar, dass die Polarisation sehr stark vermindert ist und der Widerstand sowohl bei offener als auch geschlossener Kette gemessen werden kann.

An Stelle eines Galvanometers ist (nach Kohlrausch) ein Telephon zu verwenden. v. Waltenhofen, Beetz und Greeff berechnen den Widerstand aus Spannungsmessungen. Das Element wird stromlos gemacht, und durch Zuschaltung eines sehr geringen Widerstandes ein kleiner Strom erzeugt: oder der Widerstand wird aus Spannungsverlust zwischen zwei Punkten berechnet. Die obigen Methoden werden später im Einzelnen betrachtet, und die Bedingungen für zuverlässige Resultate untersucht.

Um die Berechnung der Stromstärke in den verschiedenen Fällen möglichst übersichtlich zu machen, habe ich in II. einige allgemeine Sätze darüber zusammengestellt.

II. Von der Ableitung der Formeln für die Stromstärke

§ 1.

Die Formeln für Stromverzweigung stützen sich bekanntlich auf die Kirchhoffschen Sätze, die erst 1845[1]) angegeben sind, und welche lauten:

(I) $\Sigma \pm w_1 i_1 = \pm \Sigma E$

(I) $\varepsilon_1 w_1 i_1 + \varepsilon_2 w_2 i_2 + \cdots = \varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2 + \cdots$

(II) $\Sigma \varepsilon i = 0$

worin $\varepsilon = \pm 1$ je nach der Stromrichtung ist (vgl. die Bemerkung am Schlusse dieses Paragraphen, pag. 12), w_n = Widerstand in einzelnen Drähten, i_n = Intensität in einzelnen Drähten, E_n = elektromotorische Kraft. Für „n“ Zweige sind n Gleichungen gegeben, aus welchen man eine Determinante bilden kann.

Daraus erhält man für „i“ in jedem Zweige eine Gleichung der Form

$$i_k = \frac{E_1 f_1(w) + E_2 f_2(w) + \cdots\cdots}{N}$$

worin „N“ der Wert der Determinante ist.

Aus der Form der Gleichungen ist es sofort ersichtlich, dass:

1) Pogg. Ann. Bd. 64.

1. Die einzelnen Widerstände, die darin enthalten sind, nur linear in der Funktion „N“ vorkommen können. Jeder Widerstand kommt nämlich nur in einer vertikalen Reihe vor, da jeder nur einmal, und zwar linear in einer Gleichung vorkommt; er kann also nicht in höhere Potenzen eintreten.

2. Die Determinante „N“ enthält nur homogene Kombinationen der Widerstände.

3. Ebenso muss der Zähler nur homogene in Bezug auf jedes der w einzeln genommenen lineare Funktionen enthalten.

4. Es ist auch klar, dass kein negatives Glied im Nenner vorkommen darf, sonst könnte man in jeder Stromverzweigung durch Aenderung von Widerständen $N = 0$ machen, und dadurch $i = \infty$.

Andere Eigenschaften dieser Gleichungen gibt Ahrens[1]). Aus seiner Abhandlung entnehme ich Folgendes:

I. Eine Brücke eines Liniensystems nennt man eine Linie, die durch ihre Fortnahme das System so verändert, dass es nicht mehr möglich ist von jedem Punkte des Systems zu jedem andern zu gelangen. Gehen wir von irgend einem beliebigen Punkte aus, und entfernen wir so viel Linien des Systems wie möglich, ohne eine Brücke zu entfernen; danach nach einem anderen Punkt, u. s. w. so wird das System schliesslich den „baumförmigen Typus“[2]) angenommen haben. Ein solches System enthält keinen einzigen geschlossenen Kreis. Diese Operation kann man auf sehr viele verschiedene Arten bewerkstelligen. Die Grösse „μ“, welche die Anzahl der hierfür zu entfernenden Linien angiebt, ist jedoch eine für jedes System bestimmte Konstante. Eine „Gruppe“ von μ Linien nennt man solche zusammengehörige Linien, welche die Eigenschaft besitzen, dass nach ihrer Fortnahme das System in den baumförmigen Typus übergeht.

1) Math. Ann. Bd. 49, 1897.

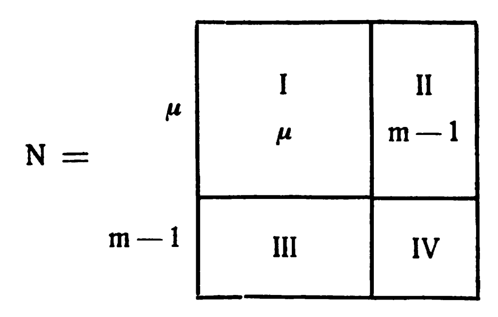
2) Cayley, Phil. Mag. XIII.

II. Um ein Liniensystem von „n“ Linien und „m“ Punkten (E n d = u. Kreuzpunkten) in diesen Typus überzuführen, müssen $\mu = n - m + 1$ Linien desselben entfernt werden.

III. Jeder geschlossene Kreis eines Systems enthält stets mindestens e i n e der μ Linien einer beliebigen Gruppe.

IV. Nimmt man in einem System $\mu - 1$ zu einer Gruppe gehörige Linien fort, so bleibt gerade noch ein geschlossener Kreis übrig.

V. In der Determinante „N“ eines Kirchhoff'schen Gleichungssystems haben wir μ Gleichungen aus dem ersten Satz und $m - 1$ aus dem zweiten. Denken wir uns die μ ersten Horizontalreihen und ebenso die μ Vertikalreihen durch eine Horizontal- bezw. Vertikallinie von den übrigen abgetrennt, so dass wir eine Vierteilung der Determinante wie in der nachstehenden Figur erhalten:



Die Determinante ist so geschrieben, dass die Reihen in I und III irgend einer Gruppe entsprechen. Alsdann entsprechen die Gebiete I und II den Gleichungen des ersten Gesetzes, die Gebiete III und IV denen des zweiten Gesetzes, und enthalten I und III die von den μ Linien der ausgewählten Gruppe, II und IV die von den übrigen, d. h. den Linien des, nach Fortnahme jener μ, übrigbleibenden baumförmigen Typus herrührenden Elemente.

In I und II kommen nur die Widerstände w der verschiedenen Drähte und Nullen, in III u. IV nur die Grössen 0, $\pm$ 1 vor. N ist eine homogene Funktion μ^{ten} Grades der Grössen w, und zwar kommen nur Kombinationen von solchen Grössen w vor, deren zugehörige Linien (Drähte) eine Gruppe bilden.

VI. Die Determinante lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\left|\begin{array}{cccccc|ccccc}
\delta_1 w_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & \\
0 & \delta_2 w_2 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & \\
0 & 0 & \delta_3 w_3 & 0 & \cdots & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta_\mu w_\mu & & & & & \\
\hline
 & & & & & \varepsilon & \varepsilon_1 & \cdots & & & \\
 & & & & & & 0 & \varepsilon_2 & \cdots & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon_m - 1
\end{array}\right|$$

worin die Grössen ε und $\delta = \pm 1$ sind. Aus obiger Betrachtung kann man die zwei folgenden Gesetze zusammenstellen:

a) Die Determinante N ist eine ganze homogene Funktion μ^{ten} Grades der Widerstände, wobei jedoch nur solche Widerstände miteinander kombiniert vorkommen, deren zugehörige Linien eine Gruppe bilden, und wo jedes Glied den Koeffizienten $+ 1$ besitzt.

b) Die Determinante des Zählers in dem für i_k resultierenden Quotienten ist eine homogene ganze Funktion $(\mu - 1)^{ten}$ Grades der Grössen w (ausser w_k), und zwar kommen nur die w derjenigen Linien mit einander kombiniert vor, welche mit „k“ eine Gruppe bilden, jede Kombination mit der algebraischen Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte multipliziert, welche in dem nach Fortnahme jener $\mu - 1$ Linien allein übrig bleibenden Kreise vorkommen; alle in der Richtung als positiv gerechnet in der i_k positiv ist.

§ 2.

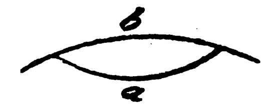
Da die Zähler des Intensitätsausdruckes nur homogene lineare Funktionen der elektromotorischen Kräfte enthalten, folgt der Satz von der Uebereinanderlagerung der von den einzelnen elektromotorischen Kräften gelieferten Intensität, den Kalischer[1]) benutzt um die Intensität einer mehrere elektromotorischen Kräfte enthaltenden Stromverzweigung aus einem einfacheren System zu bilden.

§ 3.

Einige weitere Sätze, die in diesem Paragraph angegeben sind, gestatten, jede in dieser Abhandlung vorkommende Intensität hinzuschreiben.

Teilweise sind sie schon lange bekannt, teilweise sind sie, so viel ich weiss, erst hier veröffentlicht.

Die Widerstände der Drähte a, b zwischen zwei Verzweigungspunkten werden durch w_a und w_b bezeichnet, der eines sie ersetzenden Drahtes durch $w_{a,b}$. Dann ist bekanntlich:



Figur I.

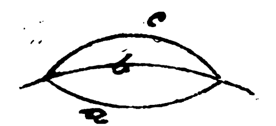
1) Wied. Ann. LXVI, 1892.

$$w_{a,b} = \frac{w_a w_b}{w_a + w_b} \qquad \text{(I)}$$

Welcher Ausdruck sich dem Gedächtnisse leicht einprägt in folgender Form:

$$\frac{1}{w_{a,b}} = \frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b}$$

Wenn drei Drähte zwischen zwei Verzweigungspunkten verlaufen, so ist der Widerstand des sie ersetzenden Drahtes:



Figur II.

$$w_{a,b,c} = \frac{w_a w_{b,c}}{w_a + w_{b,c}} = \frac{w_b w_{a,c}}{w_b + w_{a,c}} = \frac{w_c w_{a,b}}{w_c + w_{a,b}}$$

$$= \frac{w_a w_b w_c}{w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a} \qquad \text{(II)}$$

Oder in bequemerer Form für das Gedächtnis:

$$\frac{1}{w_{a,b,c}} = \frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} + \frac{1}{w_c}$$

Entsprechend bei mehr Drähten zwischen zwei Punkten.

Wenn $w_a + w_b$ durch w_{a+b} u. s. w. bezeichnet wird, so folgt

$$(w_a + w_{b,c})\, w_{b+c} = (w_b + w_{a,c})\, w_{a+c} \qquad \text{(III)}$$
$$= (w_c + w_{a,b})\, w_{a+b}$$

da jeder Ausdruck

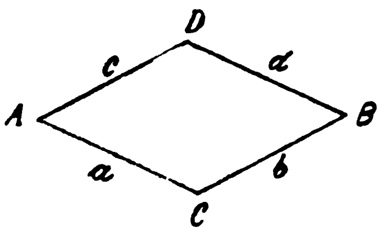
$$= w_a w_b + w_b w_c + w_a w_c$$

ist.

Besondere Fälle.

Ist $w_b = 0$, so ist $w_{a,b} = w_{a,b,c} = \ldots\ldots = 0$. Ist $w_b = \infty$, so ist $w_{a,b} = w_a$.

Nach der obigen festgesetzten Bezeichnung ist $w_{a+b,c+d}$ der Widerstand zwischen A und B, $w_{a+c,b+d}$ der zwischen C und D.



Figur III.

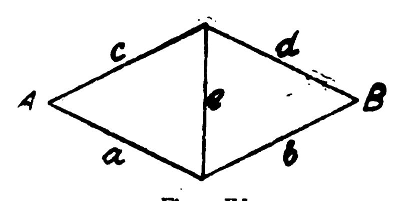
$$w_{a+b,c+d}(w_{a,b} + w_{c,d}) \text{ ist}$$

$$= \frac{w_a w_b w_{c+d} + w_c w_d w_{a+b}}{w_{a+b+c+d}}$$

$$= \frac{w_a w_c w_{b+d} + w_b w_d w_{a+c}}{w_{a+b+c+d}}$$

und folgend

$$= w_{a+c,b+d}(w_{a,c} + w_{b,d}) \qquad \text{(IV)}$$



Figur IV.

Ist W der Widerstand von A bis B, so muss, da für $w_e = \infty$

$$W = w_{a+b,c+d}$$

ist, W die Form

$$W = w_{a+b,c+d} \frac{w_e + L}{w_e + M}$$

haben, worin L und M algebraische Funktionen der Widerstände $w_a\, w_b\, w_c\, w_d$ sind.

Daraus für $w_e = 0$

$$\frac{w_{a+b,c+d}\, L}{M} = w_{a,c} + w_{b,d}$$

oder

$$M = \frac{w_{a+b,c+d}}{w_{a,c} + w_{b,d}}\, L$$

$$= \frac{w_{a+c,b+d}}{w_{a,b} + w_{c,d}}\, L$$

nach (IV).

Für $d = \infty$ geht $w_{a+b,c+d}$ in w_{a+b} über.

Also

$$W_d = w_{a+b} \frac{w_e + L_d}{w_e + M_d}$$

worin Ld den Wert bedeutet, den L bei $d = \infty$ annimmt.

Daraus ist:

$$\frac{w_e + w_c + w_{a,b}}{w_e + w_{a+c}} = \frac{w_e + L_d}{w_e + \frac{w_{a+c}}{w_c + w_{a,b}}\quad L_d}$$

oder

$$L_d = w_c + w_{a,b}$$

Ebenso ist, wenn $b = \infty$ gesetzt wird,

$$L_b = w_a + w_{c,d}$$

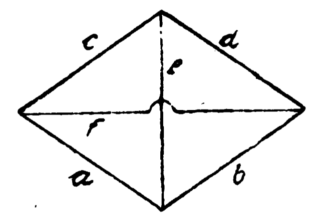
Daraus folgt

$$L = w_{a,b} + w_{c,d}$$

und $M = w_{a+c,b+d}$ mit Rücksicht auf (IV).

Also

$$W = w_{a+b,c+d} \frac{w_e + w_{a,b} + w_{c,d}}{w_e + w_{a+c,b+d}} \qquad \text{(V)}$$



Figur V.

Wir wollen den Widerstand der an die Enden von „a" sich anschliessenden Drahtverbindungen (b, c, d, e, f) durch W_a bezeichnen, und entsprehend bei den anderen Verbindungen. Dann ist der eben dargestellte Widerstand W_f, und wir haben also

$$W_a = w_{c+e,b+f} \frac{w_d + w_{c,e} + w_{b,f}}{w_d + w_{b+e,c+f}}$$

Wenn wir ferner zur Abkürzung setzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= w_{b+c+e+f}(w_d + w_{b+e,c+f}) \\ \mathfrak{B} &= w_{a+d+e+f}(w_c + w_{a+e,d+f}) \qquad \text{(VI)} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{F} &= w_{a+b+c+f}(w_e + w_{a+c,b+d}) \end{aligned}$$

so ist

$$(w_a + W_a)\mathfrak{A} = (w_b W_b)\mathfrak{B} = \cdots = (w_f + W_f)\mathfrak{F}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist gleich der Determinante, die den Nenner in den nach den Kirchhoff'schen Sätzen dargestellten Intensitätsausdrücken bildet.

§ 4.

Befindet sich die elektromotorische Kraft E in dem Zweige „a" in einer beliebigen Drahtverbindung, für den die

Intensität bestimmt werden soll, so hat „i_a“ nach dem Ohm'schen Gesetz die Form

$$i_a = \frac{E}{w_a + W_a}$$

worin W_a von w_a unabhängig ist. Aber nach S. 13 ist auch

$$i_a = \frac{Ef_1(w)}{N}$$

also $$N = f_1(w)(w_a + W_a).$$

Auch für jede andere Lage von E ist

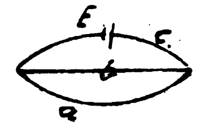
$$i_a = \frac{Ef_n(w)}{N} = \frac{f_n(w)}{f_1(w)} \cdot \frac{E}{w_a + W}$$

d. h. wenn in irgend einer Stromverzweigung die elektromotorische Kraft sich nicht in dem Zweige „a“ befindet, so ist

$$i_a = J \cdot \frac{E}{w_a + W_a}$$

worin J eine zu bestimmende Funktion der Widerstände ist.

So folgt aus



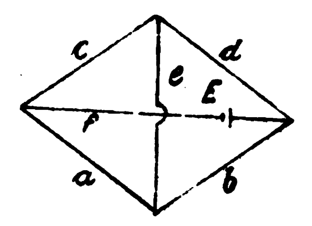
Figur VI.

$$i_c = \frac{E}{w_c + w_{a,b}}$$

$$i_a = J \cdot \frac{E}{w_a + w_{b,c}} \text{ worin}$$

$$J = \frac{w_b}{w_{b+c}} \text{ ist.}$$

Wenn wir bei der Wheatstone'schen Kombination das Element mit der elektromotorischen Kraft E in f annehmen,



Figur VII.

so ist

$$i_f = \frac{E}{w_f + W_f}$$

und es lassen sich die Intensitäten in den fünf übrigen Zweigen leicht durch i_f ausdrücken. Aus den Gleichungen

$$i_a + i_e = i_f$$
$$i_a - i_b + i_e = 0$$
$$i_c - i_d - i_e = 0$$
$$i_a w_a - i_c w_c - i_e w_e = 0$$
$$i_b w_b - i_d w_d + i_e w_e = 0$$

haben wir die Determinante

a	b	c	d	e	
1	0	1	0	0	i_f
1	-1	0	0	1	0
0	0	1	-1	-1	0
w_a	0	$-w_c$	0	$-w_e$	0
0	w_b	0	$-w_d$	w_e	0

Wir erhalten so für die vier f anliegenden Zweige gleich gebildete Ausdrücke; z. B.

$$\dot{i}_a = \frac{w_d w_e + w_c w_{b+d+e}}{\mathfrak{F}} \cdot \dot{i}_f$$

Im Zähler ist das erste Glied das Produkt der Widerstände der „a" und „f" gegenüberliegenden Zweige, das zweite das Produkt der Widerstände des „a" und „f" anliegenden Zweigs und der Summe der übrigen.

Für den gegenüberliegenden Zweig erhalten wir dagegen

$$\dot{i}_e = \frac{w_a w_d - w_b w_c}{\mathfrak{F}} \dot{i}_f$$

III. Genauigkeit der angegebenen Methoden.

Die Methode, die von Ohm angegeben wurde, beruht auf zwei Beobachtungen der Stromstärke. Man schliesst das Element durch eine Tangentenbussole und einen Widerstand. So ist

$$E = i_1 w_1$$

Schaltet man noch einen Widerstand w ein, so ist

$$E = i_2 (w_1 + w)$$

und daraus

$$E = w \frac{i_1 i_2}{i_1 - i_2}$$

Dieselbe Methode dient auch, um den Widerstand des Elementes zu messen. Es ist nämlich

$$w_1 = w \frac{i_2}{i_1 - i_2}$$

worin w_1 die Summe des inneren Widerstandes und eines bekannten Widerstands ist.

Bei beiden Bestimmungen ist eine Tangentenbussole erforderlich, und in der Genauigkeit bleibt ein solches Instrument weit hinter einem Spiegelgalvanometer zurück, selbst wenn man die Nadel einer Tangentenbussole mit einem Spiegel versieht. Sogar bei 45^0 ist der Ablesungs-

fehler bedeutend grösser als bei einem Spiegelgalvanometer. Letzteres ist aber zu Strommessungen nicht geeignet, und eine Nullmethode demnach entschieden vorzuziehen. Ferner ist die Unsicherheit, die immer bei einer zweimaligen Beobachtung vorhanden ist, schon in der Einleitung hervorgehoben worden. Bei der Ohm'schen Methode ist auch vorausgesetzt, dass E konstant bleibt. Aber um die Differenz der Intensitäten i_1 und i_2 genau zu messen, muss w eine erhebliche Grösse im Vergleich mit w_1 haben, und damit bekommt auch E einen anderen Wert bei der zweiten Einstellung als bei der ersten. Zum Vergleich mit anderen Methoden wollen wir den Fehler bei dieser Methode im günstigsten Fall berechnen.

Es wird angenommen, dass man eine Tangentenbussole mit einer Genauigkeit von $\pm 0,1^0$ ablesen kann.

Nennen wir ε_1 den Fehler von i_1, und ε_2 den Fehler von i_2, so ist der infolge dessen sich ergebende Fehler von E:

$$\frac{w\sqrt{i_2^4\varepsilon_1^2 + i_1^4\varepsilon_2^2}}{(i_1 - i_2)^2}$$

und der relative Fehler

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^2\varepsilon_1^2 + \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2\varepsilon_2^2}}{i_1 - i_2}$$

Ist $i = \text{Ctg}\,\alpha$ und δ der Ablesungsfehler, so ist

$$\varepsilon_1 = \frac{C\delta}{\cos^2\alpha_1}$$

und

$$\varepsilon_2 = \frac{C\delta}{\cos^2\alpha_2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial i_1}{\partial\alpha_1}\cdot\delta = C\sec^2\alpha_1\,\delta$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial i_2}{\partial\alpha_2}\cdot\delta = C\sec^2\alpha_2\,\delta$$

und damit der relative Fehler von E

$$\pm \frac{\delta}{(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha_2}{\operatorname{tg}^2\alpha_1} \cdot \frac{1}{\cos^4\alpha_1} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_1}{\operatorname{tg}^2\alpha_2} \cdot \frac{1}{\cos^4\alpha_2}}$$

oder wenn man $\frac{1}{x}$ für $\operatorname{tg}\alpha_1$ und $\frac{1}{y}$ für $\operatorname{tg}\alpha_2$ schreibt

$$\pm \frac{\delta}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} \sqrt{\frac{x^2}{y^2} \frac{(1+x^2)^2}{x^4} + \frac{y^2}{x^2} \frac{(1+y^2)^2}{y^4}}$$

oder

$$\pm \frac{\delta}{x-y} \sqrt{(1+x^2)^2 + (1+y^2)^2}$$

Schreibt man diesen Ausdruck (von δ abgesehen) $= U$, so ist U zu einem Minimum zu machen.

Wir sehen dabei zunächst von dem Einfluss veränderter Stromstärke auf E ab.

Für die Bestimmung bei gegebener Intensität muss ent- x oder y als gegeben angesehen werden. Für einen bestimmten Wert von x ist $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ zu setzen, d. h.

$$y^4 - 2xy(1+y^2) - (1+x^2)^2 - 1 = 0.$$

Setzen wir $x = 1$ oder $\frac{1}{x} = \operatorname{tg} 45^0$, was für eine Ablesung am günstigsten ist, so muss

$$y^4 - 2xy(1+y^2) - 5 = 0$$

werden.

Daraus ist

$$y = 2{,}58, \ \frac{1}{y} = \operatorname{tg} 21^0.$$

Der relative Fehler wird also

$$\pm \frac{\delta}{1 - 2{,}58} \sqrt{2^2 + (8{,}1)^2}$$

oder, wenn $\delta = 0{,}0017$ wird,

$$0{,}009$$

oder

0,9 Prozent.

Ist dagegen $x = 2$, so ist

$$y^4 - 4\,y\,(1 + y^2) - 26 = 0$$

und daraus

$$y = 4{,}5 \text{ oder } \left.\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \operatorname{tg} 26^0\, 36' \\ \frac{1}{y} &= \operatorname{tg} 12^0\, 24' \end{aligned}\right\}$$

und somit die Fehlergrösse

0,46 Prozent.

Bei $x = \frac{1}{2}$ ist $y = 1{,}8$ und $\frac{1}{y} = 0{,}55$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \operatorname{tg} 63^0\, 27' \\ \frac{1}{y} &= \operatorname{tg} 28^0\, 48' \end{aligned}\right\}$$

Daraus sieht man, dass der grössere Ausschlag etwas mehr als das Doppelte des kleineren sein sollte. Dieses ist aber nicht bei jeder Stromstärke zutreffend. Doch, wie oben gezeigt, darf man einen solchen grossen Unterschied in den Stromstärken nicht zulassen. Nehmen wir an, dass die eine Stromstärke nicht mehr als ein Prozent grösser ist, als die andere, so hat man $\frac{1}{y} = \frac{1}{n\,x}$ oder $y = nx$, worin n nahe gleich eins zu setzen ist.

Daraus wird

$$U = \frac{1}{(1 - n)\,x} \sqrt{(1 + x^2)^2 + (1 + n^2 x^2)^2}$$

Wenn $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ ist, so ist:

$$x = \sqrt[4]{\frac{2}{n^4 + 1}}$$

Der beste Ausschlag ist also auch hier nahe 45°.

Die Grösse des relativen Fehlers wird also

$$\pm \frac{\delta}{x(1-n)} \sqrt{x^4(1 + n^4) + 2x^2(1 + n^2) + 2}$$

oder

$$\pm \frac{\delta}{x(1-n)} \sqrt{4 + \frac{1(1 + n^2)\sqrt{2}}{\sqrt{n^4 + 1}}}$$

Wird nun die Stromstärke in dem einen Fall 1 % grösser als in dem anderen, also $n = \frac{100}{101}$, so ist $x^4 = 1{,}0199$, $x = 1{,}0049$ und bei $\delta = \frac{1^0}{10}$ wird obiger Ausdruck

$$\pm \frac{0{,}0017}{1{,}0049 \cdot \frac{1}{101}} \sqrt{7{,}92}$$

$$= 0{,}47$$

$$= \mathbf{47\ Prozent.}$$

Will man also die Aenderung von E vermeiden, so muss man bei dieser Methode auf einen Fehler von etwa 50 % gefasst sein.

Dabei wird auch vorausgesetzt, dass andere Fehlerquellen im Vergleich zu dieser vernachlässigt werden können.

Zu der Bestimmung des Widerstands nach dieser Methode bemerkt Beetz[1]):

---

1) Wied. Ann. X. 1880. S. 349.

„Aber abgesehen davon, dass wir längst wissen, dass nach der Ohm'schen Methode übereinstimmende Resultate gar nicht erhalten werden können, hatte ich gerade von der Untersuchung von Lenz und Saweljew nachgewiesen, dass sie ganz unzuverlässige Ergebnisse liefern musste."

Die Bestimmung des Widerstands wird mittelst der Gleichung

$$w_1 = w \frac{i_2}{i_1 - i_2}$$

gemacht.

Diese kann

$$w_1 = w \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}$$

geschrieben werden.

Der aus der Unsicherheit der Ablesung herrührende Fehler ist:

$$\text{für } \alpha_1 \qquad w \frac{-\sec^2 \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)^2} \delta_1$$

$$\text{für } \alpha_2 \qquad w \frac{\sec^2 \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)^2} \delta_2.$$

Der ganze Fehler ist also

$$\frac{w\delta}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)^2} \sqrt{\sec^4 \alpha_1 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + \sec^4 \alpha_2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}$$

und der rel. Fehler

$$\frac{\delta}{(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2) \operatorname{tg} \alpha_2} \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_1}$$

und wenn $\frac{1}{x}$ für $\operatorname{tg} \alpha_1$ und $\frac{1}{y}$ für $\operatorname{tg} \alpha_2$ gesetzt werden, ist dieser Ausdruck

$$= \frac{\delta x y^2}{(x - y)} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \frac{1}{y^2} + \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)^2 \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\delta}{x(x-y)}\sqrt{y^2(1+x^2)^2 + x^2(1+y^2)^2}$$

Setzt man wieder $y = nx$ so ist dieser

$$= \frac{\delta}{x(1-n)}\sqrt{n^2x^4(1+n^2) + 4n^2x^2 + 2}$$

$$= \frac{\delta}{(1-n)}\sqrt{n^2x^2(1+n^2) + 4n^2 + \frac{2}{x^2}}$$

und dies wird ein Minium wenn

$$(1 + n^2)\, n^2\, x^4 = 2$$

oder

$$x^4 = \frac{2}{n^2(1+n^2)} \text{ ist.}$$

Danach wird die Grösse des relativen Fehlers

$$\frac{\delta}{(1-n)}\sqrt{n^2(1-n^2)\sqrt{\frac{2}{n^2(1+n^2)}} + 4n^2 + 2\sqrt{\frac{n^2(1+n^2)}{2}}}$$

oder

$$\frac{\delta}{1-n}\sqrt{2n\sqrt{2(1+n^2} + 4n^2}$$

oder

0,479, bei $n = 1{,}01$

d. h.

48 Prozent.

Es ist also für den Widerstand dieselbe Ungenauigkeit wie für die elektromotorische Kraft.

Wenn wir nach Wheatstone zwei elektromotorische Kräfte E_1 und E_2 vergleichen, indem wir beidemal denselben Ausschlag des Galvanometers bewirken, so haben wir

$$E_1 = iw_1 = w_1 \, \mathrm{Ctg}\, \alpha$$
$$E_2 = iw_2 = w_2 \, \mathrm{Ctg}\, \alpha$$
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

Schreibt man diese Gleichung

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1 \, \mathrm{tg}\, \alpha_1}{w_2 \, \mathrm{tg}\, \alpha_2}$$

so ist der Fehler bei einer Unsicherheit von δ_1 in α_1

$$\frac{w_1 \sec^2 \alpha_1}{w_2 \, \mathrm{tg}\, \alpha_2} \delta_1 = \frac{w_1}{w_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \cdot \delta_1$$

und bei δ_2 in α_2

$$-\frac{w_1 \, w_2 \, \mathrm{tg}\alpha_1 \sec^2 \alpha_2}{w_2{}^2 \, \mathrm{tg}^2 \alpha_2} \cdot \delta_2 = -\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\mathrm{tg}\alpha_1}{\sin^2 \alpha_2} \cdot \delta_2$$

$$= -\frac{w_1}{w_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \delta_2.$$

Der Gesamtfehler ist also

$$\frac{w_1 \delta}{w_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}}$$

und der relative Fehler

$$\frac{\delta}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}}$$

Also für

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$
$$\frac{2\sqrt{2} \cdot \delta}{\sin 2\alpha}$$

Nun ist

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{E_1}{w_1 C}$$

also

$$\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\left(\frac{E_1}{w_1C}\right)^2}{\frac{E_1}{w_1C}}=\frac{w_1C}{E_1}+\frac{E_1}{w_1C}$$

und der relative Fehler

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\delta\,(w_1^2\,C^2+E_1^2)}{E_1\,w_1\,C}$$

und dieser wird ein Minimum für

$$\frac{E_1}{w_1\,C}=1;\ w_1=\frac{E_1}{C}.$$

woraus dann folgt

$$w_2=\frac{E_2}{C}.$$

Es ist dann

$$E_1=w_1\,C\,tg\,\alpha$$
$$tg\alpha=1\,,\quad \alpha=45^0$$

nnd der relative Fehler ist $\sqrt{8}\cdot\delta=0{,}0048$ oder **0,48** Prozent,

wenn $\delta=0{,}0017$ angenommen wird. Wird mit einer Tangentenbussole vom Reduktionsfaktor (auf Ampère) $C=4$ gemessen, so würde das für den Stromkreis eines Daniell einen Widerstand von etwa $\frac{1{,}1}{4}$ oder 0,275 für den eines Akkumulators von etwa 0,5 Ohm ergeben, und eine Stromstärke von 4 Ampère. Unter diesen Umständen übt aber die Unsicherheit über den inneren Widerstand der Elemente, der sich noch dazu ebenso wie die elektromotorische Kraft bei solcher Stromstärke rasch ändert, einen so grossen Einfluss aus, dass eine gute Bestimmung unmöglich wird. Vergrössert

man bei Anwendung derselben Tangentenbussole den Widerstand so, dass der vom inneren Widerstand der Elemente herrührende Fehler vernachlässigt werden kann, so wird der von „δ“ herrührende viel zu gross; z. B. wenn im Kreis des Daniell'sche der Widerstand = 50 Ohm genommen wird, so ist $w_1 = 50$

$$i_1 = C \operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \cdot \alpha = \frac{i_1}{4} = \frac{E_1}{200} = 0{,}0055$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \times 0{,}0055}{1 + (0{,}0055)^2}$$

Relativer Fehler

$$= 2\sqrt{2} \cdot \delta \times \frac{1{,}00003025}{0{,}011}$$

$$= 0{,}44$$

$$= \mathbf{44\ Prozent.}$$

Besser wird das Ergebnis, wenn man Tangentenbussolen vom kleineren Reduktionsfaktor anwendet.

Obiger Wert von C ist der für eine Bussole, die nur e i n e Drahtwindung hat. Werden 100 solche Windungen in demselben Galvanometer eingeschaltet, so ist C = 0,04.

w_1 ist hier $\frac{1{,}1}{0{,}04}$ oder 27,5 für dasselbe Element, und 50 Ohm für den Akkumulator zu setzen. Am besten wird das Resultat bei einer Stromstärke von 0,04 Amp. in beiden Kreisen, wobei der Fehler 0,4 Prozent beträgt. In der Praxis ist aber ein so kleiner Fehler nicht zu bekommen, denn in w_1 und w_2 sind die unbekannten Widerstände der beiden Elemente enthalten, und es wird immer vorausgesetzt, dass diese so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können. Wir haben nämlich, wenn v_1 der innere Widerstand von E_1 ist, und v_2 der von E_2:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1 + v_1}{w_2 + v_2} = \frac{w_1}{w_2} + \frac{v_1}{w_2} - \frac{v_2\, w_1}{w_2^2}$$

und bei Anwendung z. B. von einem Clarkeschen Element kann v_1 oder v_2 zu einigen Hundert Ohm werden.

Die Beobachtungsmethode wurde von Fechner so geändert, dass man nicht den Ausschlag, sondern den Widerstand w_1 konstant erhält, dann ist

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

Der Fehler ist wieder

$$\frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\delta}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}}$$

und der relative Fehler

$$\frac{\delta}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2}}$$

Nun ist $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_1}{C w_1}$ und $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_2}{C w_2}$.

Der relative Fehler ist also

$$\frac{\delta \sqrt{(C^2 w_1^2 + E_1^2)(C^2 w_2^2 + E_2^2)}}{E_1\, C w_2} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{w_2^2}{w_1^2} \cdot \frac{C^2 w_1^2 + E_1^2}{C^2 w_2^2 + E_2^2} + \frac{E_1^2}{E_2^2} \cdot \frac{C^2 w_2^2 + E_2^2}{C^2 w_1^2 + E_1^2}}$$

$$= \frac{\delta}{C} \sqrt{C^4 \left(\frac{1}{E_1^2} + \frac{1}{E_2^2}\right) w_1^2 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{w_1^2} + 4 C^2}$$

wenn wir $w_1 = w_2$ schreiben.

Dies wird ein Minimum, wenn

$$2\, w_1 C^4 \left(\frac{1}{E_1^2} + \frac{1}{E_2^2}\right) - \frac{2 (E_1^2 + E_2^2)}{w_1^3} = 0$$

ist oder

$$\frac{w_1^2 C^4}{E_1^2 E_2^2} = \frac{1}{w_1^2}, \text{ also } w_1^2 = \frac{E_1 E_2}{C^2}.$$

Danach ist der kleinste relative Fehler

$$\partial \sqrt{\left(\frac{1}{E_1^2} + \frac{1}{E_2^2}\right) E_1 E_2 + \frac{(E_1^2 + E_2^2)}{E_1 E_2} + 4}$$

oder

$$\frac{\partial \sqrt{2 (E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2)}}{\sqrt{E_1 E_2}}$$

oder

$$\frac{\partial \sqrt{2} (E_1 + E_2)}{\sqrt{E_1 E_2}}$$

Konnte man E_1 und E_2 beliebig nehmen, oder auch nur eins von beiden, so ist der kleinste Wert des obigen Ausdrucks

$$\partial \sqrt{2} \cdot 2 \text{ oder } 0{,}48\,\%$$

denn wenn $E_2 = m E_1$ geschrieben wird, so haben wir

$$\frac{E_1 (1 + m)}{E_1 \sqrt{m}}$$

und dieses wird ein Minimum für $m = 1$.

Für $E_1 = 1{,}1$ $E_2 = 2$ ist der Fehler 0,5 Prozent.

In der Praxis sind E_1 und E_2 gegeben, und man muss dafür sorgen, dass diese Elemente möglichst gleiche Widerstände haben, oder zunächst die Widerstände bei der gegebenen Stromstärke bestimmen.

Bei der „Summe und Differenz“ Methode, ebenfalls von Fechner werden E_1 und E_2 einmal in derselben, und einmal in entgegengesetzter Richtung geschaltet,

Dann ist

$$i_1 = \frac{E_1 + E_2}{w}$$

$$i_2 = \frac{E_1 - E_2}{w}$$

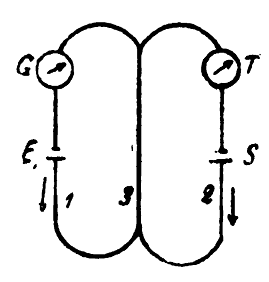
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 + i_2}{i_1 - i_2}$$

Hierbei kommen zwar die Widerstände nicht in Betracht, aber die elektromotorischen Kräfte werden durch zwei sehr verschiedene Intensitäten gemessen, und die Annahme gemacht, dass E_1 und E_2 ungeändert bleiben.

Für unser Problem, die Messung bei gegebener Intensität zu machen, ist diese Methode also unbrauchbar.

In sämtlichen obigen Verfahren ist es erforderlich, eine passende Intensität zu wählen, und die elektromotorische Kraft als eine für jede Stromstärke konstante Grösse anzusehen.

Von Kompensationsmethoden ist die erste von Poggendorf angegeben, wobei der Strom in dem zu untersuchenden Element, durch einen entgegengesetzten Strom, auf Null gebracht wird. Es sind viele Abänderungen seiner ersten Methode angegeben. Das bekannteste Verfahren ist in der Figur dargestellt.



Figur I.

Der Zweig 1 wird zunächst stromlos gemacht. Danach schaltet man E_2 statt E_1 ein, und bringt das Galvanometer G wieder auf Null. Die Stromstärke in 2 wird auch in T abgelesen.

Es ist dann

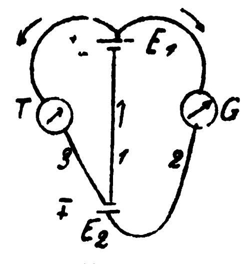
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_2 w_3}{i_2' w_3'}$$

Hier tritt wieder die Unsicherheit durch die zwei Ablesungen in der Tangentenbussole auf, und dazu kommt auch der Ablesungsfehler bei G, also vier Fehlerquellen. Wie hier beschrieben ist E nur in stromlosem Zustand gemessen. Will man S statt E kompensieren, und E und S umtauschen, so ist

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_2 (w_2 + w_3)}{i_2'(w_2' + w_3')}$$

was auf dasselbe hinaus kommt wie bei der Fechner'schen Methode.

Etwas anders ist eine zweite auch von Poggendorf[1]) angegebene Methode. Diese soll bei inkonstanten Elementen besonders geeignet sein.



Figur II.

Der Zweig 2 ist für gewöhnlich geöffnet, und wird nur momentan geschlossen, wenn w_1 so gewählt ist, dass $i_2 = 0$.

---

1) Pogg. Ann. LIV.

Dann ist

$$i_2 = \frac{E_2}{w_2 + w_{1,3}} - \frac{E_1}{w_2 + w_{1,3}} \cdot \frac{w_3}{w_{1+3}}$$

und bei $i_2 = 0$ ist

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{w_3}{w_{1+3}} \qquad \text{(I)}$$

„w_1“ enthält den wesentlichen Widerstand von E_1, er kann aber weggeschafft werden durch

$$i_3 = \frac{E_1 w_2 + E_2 w_1}{w_2 w_{1+3} + w_1 w_3}$$

und mit Rücksicht auf (I)

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = i_3 w_{1+3} \\ E_2 = i_3 w_3 \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Entweder muss man also zwei Galvanometer beobachten, wodurch zwei Fehlerquellen hineinkommen, oder eine Bestimmung des Widerstands in E_1 machen.

Bosscha setzt an Stelle der Strommessung durch T die Bestimmung eines Widerstands in 3. Wird nämlich ein ein kleiner Widerstand l_3 in 3 eingeschaltet und G wiederum auf Null gebracht durch Zuschaltung eines Widerstands l_1 in 1, so haben wir

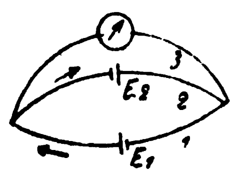
$$E_2 = E_1 \frac{w_3 + l_3}{w_{1+3} + l_1 + l_3}$$

$$E_2 = E_1 \frac{l_3}{l_1 + l_3}.$$

Ein Verfahren, wobei das Element nicht kompensiert wird, hat Bosscha[1]) ebenfalls angegeben.

1) Pogg. Ann. 94, 1855.

Er verbindet die beiden Ketten entsprechend der nachstehenden Figur, und schaltet ein Galvanometer in die Abzweigung.



Figur III.

Bei dieser Anordnung wird der Strom niemals vernichtet, weder in der einen, noch in der anderen Kette. Der abgezweigte Strom wird Null, wenn

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2} \text{ ist.}$$

Will man die Messung der Widerstände von E_1 und E_2 vermeiden, so ist durch eine zweite Beobachtung

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1 + l_1}{w_2 + l_2}$$

und daraus

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

Ueber diese Methode siehe weiter unter „Hoorweg".

Die Kompensationsmethoden lassen sich, wie oben erwähnt, nicht gut für unseren Zweck gebrauchen. Es wäre aber interessant zu wissen, ob solche Methoden grössere Genauigkeit bieten können, wie die später zu besprechenden Strom-Methoden.

Das Galvanometer, das für die Versuche in dieser Abhandlung benutzt worden ist, ist ein astatisches Spiegelgalvanometer mit Glockenmagneten von Siemens und Halske, das mit einem Fernrohr aus der Entfernung 265,7 cm beobachtet wurde. Man kann annehmen, dass die Ablesung bis

zu einer Genauigkeit von 0,1 mm auf der Skala gemacht werden konnte. Setzen wir diese Unsicherheit der Ablesung $= \delta$, und nennen wir α den Ausschlag, der — Proportionalität vorausgesetzt — einer Intensität von 1 Ampère entsprechen würde, so ist $\frac{\delta}{\alpha}$ die Stromstärke, die den Ausschlag δ hervorbringt.

Die auf Seite 48 gegebene Formel

$$i_2 = \frac{E_2 w_{1+3} - E_1 w_3}{w_2 w_{1+3} + w_1 w_3}$$

liefert für die Einstellung von G auf Null

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} (w_2 w_{1+3} + w_1 w_3) = E_2 w_{1+3} - E_1 w_3$$

und bei der zweiten Einstellung

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} [w_2 (w_{1+3} + l_{1+3}) + (w_1 + l_1)(w_3 + l_3)]$$
$$= E_2 \{w_{1+3} + l_{1+3}\} - E_1 \{w_3 + l_3\}$$

oder

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} N = E_2 w_{1+3} - E_1 w_3$$

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} N_1{}^1 = E_2 (w_{1+3} + l_{1+3}) - E_1 (w_3 + l_3)$$

und daraus

$$E_2 l_{1+3} = E_1 l_3 \pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{N^2 + N_1{}^2}$$

Da l_1 und l_3 klein sind können wir $N_1 = N$ schreiben. Also

$$E_2 = E_1 \frac{l_3}{l_{1+3}} \pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \frac{N}{l_{1+3}}$$

Wir haben

$$\frac{N}{l_{1+3}} \text{ oder } \frac{NE_2}{E_1 l_3}$$

möglichst klein zu wählen.

Nun ist

$$\frac{N}{E_1} = \frac{w_2 w_{1+3} + w_1 w_3}{E_1} = \frac{w_3}{w_{1+3}} \cdot \frac{w_2 w_{1+3} + w_1 w_3}{E_2}$$

$$= \frac{w_3}{E_2}\left(w_2 + \frac{w_3 (E_1 - E_2)}{E_1}\right)$$

E_1 ist $>$ E_2, es ist also vorteilhaft w_2 und w_3 möglichst klein zu machen.

Das Minimum für w_2 wird durch den Galvanometerwiderstand, den Widerstand von E_2 und die Zuleitungsdrähte bestimmt. Soll E_1 konstant während des Versuchs bleiben, so haben wir die Bedingung, dass i_1 nicht über einen gegebenen kleinen Wert ansteigen darf. i_1 ist aber gleich i_3, und

$$i_3 = \frac{E_1}{w_{1+3}} = \frac{E_2}{w_3}$$

und in diesem Fall ist ein Minimum für w_3 auch festgestellt.

Nehmen wir als Beispiel E_1 ein Clarke'sches Normalelement, E_2 ein Dan. Element, also $E_1 = 1{,}434$ und $E_2 = 1{,}1$, und setzt man eine Intensität von $\frac{1}{20000}$ Amp. in dem das Normalelement enthaltenden Kreis voraus, was etwa der hierin ohne Polarisation möglichen Stromstärke entspricht, so ist $w_{1+3} = 28680$ Ohm.

Ein Versuch ergab für $\log \frac{\delta}{\alpha}$ 9,9124529.

Es wird ferner nötig, dass die Widerstände $l_1 + l_3$ nur ein kleiner Bruchteil von w_{1+3} sind. In den verschiedenen

Versuchen haben wir diesen Teil ($= \vartheta$) nicht grösser als $\frac{1}{100}$ gemacht.

Daraus ist der Fehler gleich

$$\pm \sqrt{2}\, N \frac{\delta}{\alpha} \frac{1}{\vartheta w_{1+3}}$$

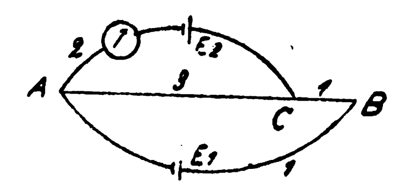
in einer Bestimmung von E_2.

Der Widerstand des Galvanometers mit den vier Rollen hintereinander geschaltet ist ungefähr 6, also $w_2 = 7$ ungefähr. Dann ist

$$w_3 = w_{1+3} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 22000$$
$$w_1 = 6680\,,\ \vartheta w_{1+3} = 287$$

Der Fehler ist 0,00593, also bei der Bestimmung von $\frac{E_2}{E_1}$ wird er **0,54%**.

Du Bois-Reymond hat diese Methode etwas umgeändert, indem er den einen Widerstand vergrösserte, und zu gleicher Zeit den anderen verkleinerte. Seine Anordnung zeigt die nachstehende Figur.



Figur IV.

Steht das Galvanometer G auf Null, so ist

$$E_2 = E_1 \frac{w_3}{w_{1+3}}$$

worin w_1 = dem Widerstand AE_1BC ist. Durch Verschiebung des Kontaktes C wird ein Widerstand l_1 in w_3 eingeschaltet, und dadurch ist w_1 um l_1 verkleinert worden. Wird l zwischen E_1 und B zugeschaltet, so ist

$$E_2 = E_1 \frac{w_3 + l_1}{w_1 + {}_3 + l} = E_1 \frac{l_1}{l}$$

Die Ausführbarkeit verlangt einen Widerstand

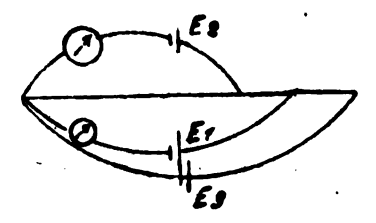
$$w_3 = \frac{w_1 E_2}{E_1 - E_2}$$

und bei nahe gleichen E_1 und E_2 würde man einen grossen Widerstand in w_3 vorschalten müssen.

In dem obigen Beispiel wird $l = 287$, also $l_1 = \frac{11}{14} \cdot 287$, was mit einem gespannten Draht schwer zu bekommen ist. Machen wir l kleiner, so wird in demselben Maas ϑ verkleinert und der Fehler vergrössert.

Das Verfahren von Latimer Clark ist wesentlich dasselbe, nur wird eine Hilfssäule E_3 zugeschaltet, um zwei inkonstante elektromotorische Kräfte E_1 und E_2 gleichzeitig zu kompensieren.

$$E_3 > E_1 > E_2$$



Figur V.

Will man mit einem Galvanometer auskommen, so muss man E_1 und E_2 mit ihm durch einen Umschalter verbinden, und E_1 und E_2 nacheinander einschalten.

Lord Rayleigh benutzt bei seiner Bestimmung der elektrischen Kraft von Normal-Elementen auch die Du Bois-Reymond'sche Anordnung, aber mit Stöpselrheostaten statt des gespannten Drahtes. Die zwei Elemente sind in dem Zweige 2 nacheinander einzuschalten, und die Summe der zwei Widerstände AC + CB (Seite 55) konstant beizubehalten. Hierin ist das nichtkompensierte Element immer in einem Stromkreis von demselben Widerstand.

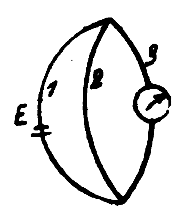
Wenn man eine Reihe von Thermosäulen von bekannter elektrischer Kraft hat, so kann man mit Regnault auch das Element in einfachem Kreis kompensieren.

Wie wir gesehen haben, gestatten die besten der Kompensationsmethoden eine sehr genaue Vergleichung zu machen, wenn es sich nur darum handelt die elektrische Kraft bei ungeschlossener Kette zu finden.

Von den modernen Strommethoden sind die von Hoorweg und Feussner zuerst angegeben. Letztere wird unten ausführlich besprochen.

In der von Raoult[1]) angegebenen „Méthode des Dérivations", wird ein Element in einen einfachen Stromkreis eingeschaltet, und das Galvanometer als Nebenschluss.

Es ist hier wieder



Figur VI.

1) Ann. de Chim. et de Phys. 2. 330. 1884.

$$i_3 = \frac{E\,w_2}{w_1\,w_3 + w_2\,w_{1+3}}$$

Danach ist $2w_2$ für w_2 zu setzen, und die neue Intensität „i_3'" wird

$$i_3' = \frac{2\,E\,w_2}{w_1\,w_3 + 2w_2\,w_{1+3}}$$

Daraus ist

$$E = \frac{i_3\,i_3'}{2i_3 - i_3'} \cdot w_{1+3}$$

Es liegt sehr nahe, diese Methode zu verallgemeinern, indem bei der zweiten Einstellung nicht $2w_2$ sondern nw_2 als Abzweigwiderstand verwendet wird. Es ist dann:

$$E = \frac{i_3\,i_3'}{ni_3 - i_3'}\,(u-1)w_{1+3}\,.$$

Für diesen allgemeinen Fall ist der Fehler:

$$\pm\,(n-1)\,w_{1+3}\sqrt{\left\{\left(\frac{i_3'^2}{ni_3 - i_3')^2}\right)^2 \overset{2}{\triangle}_1 + \left(\frac{ni_3^2}{(ni_3 - i_3')^2}\right)^2 \overset{2}{\triangle}_2\right\}}$$

worin $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die Fehler in den einzelnen Beobachtungen bedeuten. Sind auch C der Reduktionsfaktor der Bussole, α_1 und α_2 die Ausschläge, δ_1 und δ_2 die Ablesungsfehler, so wird der Gesamtfehler:

$$\pm\,\frac{C\,\delta\,(n-1)\,w_{1+3}}{(n\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 - \mathrm{tg}\,\alpha_2)^2}\sqrt{\left\{\frac{\mathrm{tg}^4\,\alpha_2}{\cos^4\alpha_1} + \frac{n^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha_1}{\cos^4\alpha_2}\right\}}$$

worin $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ geschrieben ist: oder

$$\pm\,C\,\delta\,(n-1)\,w_{1+3}\,\frac{\sqrt{\mathrm{tg}^4\,\alpha_2\,(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_1)^2 + n^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha_1\,(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_2)^2}}{(n\,\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2)^2}$$

Schreibt man

$$\frac{w_1\,w_3}{w^2\cdot w_{1+3}}=x,$$

und daher:

$$\operatorname{Ctg}\alpha_1=\frac{E}{w_{1+3}\,(1+x)}$$

$$\operatorname{Ctg}\alpha_2=\frac{n\,E}{w_{1+3}\,(n+x)}$$

so wird obiger Ausdruck

$$\pm\frac{C\,\delta}{n\,(n-1)}\sqrt{\Big\{\Big((n+x)^4+n^2\,(1+x)^4\Big)w^2_{1+3}}$$

$$+\,2\,n^2\frac{E^2}{C^2}\Big\{(1+x)^2+(n+x)\Big\}+\frac{E^4\,n^2\,(n^2+1)}{C^4\,w^2_{1+3}}\;.$$

Er wird ein Minimum, wenn

$$C=\frac{E}{w_{1+3}}\sqrt[4]{\frac{(n^2+1)\,n^2}{(n+x)^4+n^2\,(1+x)^4}}\quad\text{ist.}$$

Führen wir diesen Wert in den Fehlerausdruck ein, so wird er

$$\pm\frac{\delta}{n\,(n-1)}\sqrt{\Big\{2\,n\,E^2\sqrt{(n^2+1)((n+x)^4+n^2\,(1+x)^4)}}$$

$$+\,2\,n^2\,E^2\,((1+x)^2+(n+x)^2\Big\}.$$

Hierin mus „x“ ein Minimum werden. Wäre x gleich Null zu machen, so wird der Fehler

$$\pm\frac{2\,E\,\delta}{n-1}\sqrt{(n^2+1)}$$

$$„x“\left(=\frac{w_1\,w_3}{w_2\cdot(w_1+w_3)}\right)$$

kann aber nicht gleich Null werden, wohl aber sehr klein.

Die Stromstärke „i_1“ ist eine gegebene Grösse, und wenn vorausgesetzt wird, dass die Intensität „i_1“ bei der

zweiten Beobachtung $= i_1\ (1-\vartheta)$ ist, worin ϑ ein kleiner Bruchteil ist, so ist:

$$i_1 = \frac{E}{w_{1+3}} \cdot \frac{1 + \frac{w_3}{w_2}}{1 + x}$$

und

$$i_1 = \vartheta i_1 = \frac{E}{w_{1+3}} \cdot \frac{n + \frac{w_3}{w_2}}{n + x}$$

und daraus

$$\frac{w_3}{w_2} = \frac{(n-1)\,x + \vartheta\,(n+x)}{n - 1 - \vartheta\,(n+x)}$$

$$w_{1+3} = \frac{E}{i_1} \cdot \frac{n-1}{n - 1 - \vartheta\,(n+x)}$$

Für den angegebenen Fall, worin $n = 2$ ist, wird der Fehler

$$= \pm\, 2\,\sqrt{5}\,.\,E\,.\,\delta$$

wenn wir x als sehr klein gegen u vernachlässigen.

Hierzu ist ein Galvanometer von Reduktionsfaktor $C = \frac{E}{w_{1+3}}$ nötig, und nur in den seltensten Fällen steht ein solches Instrument zur Verfügung.

Beispiel: E soll etwa 1,1 Volt sein, i_1 etwa 0,01, $n = 2$, $\vartheta = 0{,}01$.

Hier muss

$$w_1 + \frac{w_2\,w_3}{w_{2+3}} = 110 \text{ sein.}$$

Also

$$w_3 = \frac{w_2\,(110 - w_1)}{w_{1+2} - 110}$$

und daraus ist $w_1 < 110$, $w_{1+2} > 110$. x wird klein, wenn entweder w_{1+3} gross ist oder w_2 gross. w_{1+3} ist aber etwa $\frac{E}{i_1} \cdot \frac{50}{49} = 112$.

Machen wir $w_1 = 1$, $w_3 = 111$, so ist $\frac{w_2 w_3}{w_{2+3}} = 109$ und somit $w_2 = 6049{,}5$.

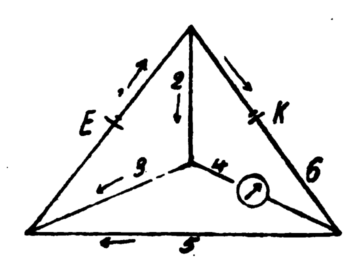
Hier ist x gleich etwa $\frac{1}{6050}$ und kann also vernachlässigt werden.

Der Reduktionsfaktor wird

$$C = \frac{E}{w_{1+3}} = 0{,}009$$

und der Fehler $2\sqrt{5} \cdot E \cdot \delta$ oder der relative Fehler $2\sqrt{5}\,\delta = 2 \times 2{,}24 \times 0{,}0017 = \mathbf{0{,}7}\ \%_0$.

Die von Hoorweg angegebene Schaltung ist in der untenstehenden Figur angegeben:



Figur VII.

Das in 4 eingeschaltete Galvanometer wird zunächst auf Null gebracht: danach sind kleine Widerstände l_1 und l_6 in 1 und 6 einzuschalten, um die Nadel wieder auf ihre Ruhelage zu bringen.

Diese Schaltweise entspricht der Wheatstone'schen Anordnung: die Intensität i_4 lässt sich also aus der auf Seite 8 angegebenen Formel hinschreiben. Sie ist:

$$i_4 = \frac{E(w_6 w_3 - w_2 w_5) - K(w_1 w_{3+5} + w_5 w_{2+3})}{N}$$

worin

$$N = w_{1+2+3}(w_4 w_5 + w_4 w_6 + w_5 w_6) + w_1 w_2 w_{3+4+5} + w_2 w_3 w_{5+6} + w_1 w_3 w_{4+6}.$$

Wenn $i_4 = 0$ ist, ist

$$\frac{K}{E} = \frac{w_6 w_3 - w_2 w_5}{w_1 w_{3+5} + w_5 w_{2+3}} \qquad \text{(I)}$$

und nach Zusatz von l_1 und l_6

$$\frac{K}{E} = \frac{l_6 w_3}{l_1 w_{3+5}}$$

Aus

$$i_6 w_5 = (i_1 - i_6) w_3$$

folgt

$$i_1 > i_6.$$

Es ist auch

$$\begin{cases} E(w_3 w_6 - w_2 w_5) - K(w_1 w_{3+5} + w_5 w_{2+3}) = \pm \frac{\delta}{\alpha} N \\ E(w_3(w_6 + l_6) - w_2 w_5) - K(w_1 + l_1) w_{3+5} + w_5 w_{2+3} = \pm \frac{\delta}{\alpha} N^1 \end{cases}$$

und daraus:

$$E w_3 l_6 = K l_1 w_{3+5} \pm \frac{\delta}{\alpha} N \sqrt{2}.$$

$$\frac{E}{K} = \frac{l_1 w_{3+5}}{l_6 w_3} \pm \frac{\delta}{\alpha} \frac{N \sqrt{2}}{w_3 l_6 K}$$

worin $\frac{\delta}{\alpha}$ ihre frühere Bedeutung hat.

Aus den schon angegebenen Formeln folgt noch:

$$i_1 = \frac{(w_6 w_{3+4+5} + w_{2+4} w_{3+5} + w_2 w_4) E + (w_2 w_{4+5} + w_3 w_{2+4}) K}{N}$$

$$i_6 = \frac{(w_3 w_{2+4} + w_2 w_{4+5}) E + (w_3 w_{1+2+4+5} + w_{1+2} w_{4+5}) K}{N}$$

und aus der Figur ist sofort ersichtlich, dass

$$\left.\begin{aligned} i_1 w_1 + (i_1 - i_6) w_{2+3} &= E \\ i_6 w_5 - (i_1 - i_6) w_3 &= 0 \\ i_6 w_6 - (i_1 - i_6) w_2 &= K \end{aligned}\right\}$$

wenn $i_4 = 0$ ist.

Daraus ist

$$w_3 w_6 - w_2 w_5 = \frac{K w_5}{i_1 - i_6}$$

und

$$E w_5 = (i_1 - i_6)(w_{1+2+3} w_5 + w_1 w_3)$$

Wenn wir obigen Wert von „i_6“ in den Fehlerausdruck

$$\frac{\left(\frac{\delta}{\alpha} N \sqrt{2}\right)}{w_3 l_6}$$, so wird er:

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \frac{E}{i_6 l_6} \left\{ w_{2+4} + \frac{w_2 w_{4+5}}{w_3} + \frac{K}{E}\left(w_{1+2+4+5} + \frac{w_{1+2} w_{4+5}}{w_3}\right)\right\}$$

Daraus folgt, dass die Bestimmung der elektromotorischen Kraft E am empfindlichsten wird, wenn $w_3 = \infty$ ist.

Dann ist:

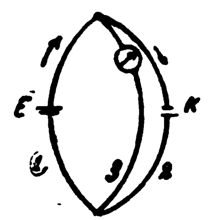
$$\frac{E}{K} = \frac{w_{1+5}}{w_6} = \frac{l_1}{l_6}.$$

$$i_1 = i_6 = \frac{E \frac{w_{2+4}}{w_{1+2+4+5}} + K}{w_6 + w_{1+5, 2+4}} = \frac{K}{w_6} = \frac{E}{w_{1+5}}$$

und der Fehler von E

$$\frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \frac{E}{i_6 l_6} \left\{ w_{2+4} + \frac{K}{E}(w_{1+2+4+5}) \right\}.$$

Dieser einfache Grenzfall entspricht der auf S. 50 gegebenen Methode von Bosscha. Sie ist sehr wertvoll für den Fall, dass zwei Elemente bei derselben sehr kleinen Stromstärke mit einander verglichen werden sollen, sodass die auftretende Polarisation vernachlässigt werden darf; z. B. bei der Vergleichung von Thermo-Elementen oder -Säulen mit galvanischen Elementen. Das Verfahren gestaltet sich dann folgendermassen.



Figur VIII.

Das Thermo-Element E wird auf die gegebene Stromstärke gebracht, wobei K auszuschalten ist und der Ausschlag der Galvanometer-Nadel beobachtet. Danach wird E ausgeschaltet und der Widerstand in „2“ geändert, bis der Ausschlag derselbe — aber von entgegengesetzter Richtung — ist. Dann werden beide Stromkreise geschlossen und die Nadel auf Null gebracht. Endlich setzt man die Widerstände l_1 und l_2 hinein und bringt wieder die Nadel auf Null.

Es ist

$$\frac{E}{K} = \frac{l_1}{l_2}$$

Der Fehler von E wird

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \frac{E}{i_2 l_2} \left\{ w_3 + \frac{K}{E} w_{1+3} \right\}$$

Darin sind i_2 $(=i_1)$ und E gegeben, und $l_1 = \vartheta w_1$ worin $\vartheta =$ etwa 0,01 zu setzen ist. — Der Fehler-Ausdruck ist also

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \frac{E}{\vartheta K} \left\{ w_3 (1 + \frac{K}{E}) + w_1 \frac{K}{E} \right\}$$

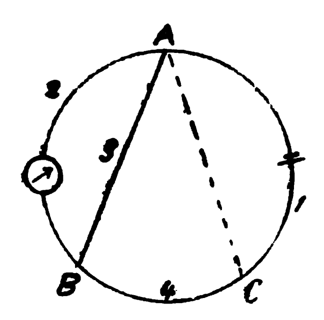
$$= \pm \frac{\delta}{\alpha} \frac{\sqrt{2}}{\vartheta} \left\{ w_3 (\frac{E}{K} + \frac{E}{i_1} \right\}$$

worin w_3 möglichst klein zu wählen ist.

IV. Ueber die obigen Methoden zur Bestimmung des inneren Widerstandes.

Von den für die Bestimmung des inneren Widerstandes angegebenen Methoden ist die Ohm'sche schon besprochen worden.

Siemens schaltet Galvanometer und Säule in einen Kreis mit einer Abzweigung und verlegt den Verzweigungspunkt danach von B nach C, um dieselbe Intensität zu bewirken.



Figur IX.

Bezeichnen wir mit i_1 und i_2 die Stromstärken in 1 und 2, wenn der Draht 3 von A nach B geht; mit i_1' und i_2', wenn er von A nach C geht, und setzen wir

$$w_{1+2+4} w_3 + + w_1 w_2 + w_2 w_4 = N$$
$$w_{1+2+4} w_3 + w_1 w_2 + w_1 w_4 = N_1$$

so ist

$$i_1 = \frac{E\,w_{2+3}}{N}\ ,\ i_1' = \frac{E\,w_{2+3+4}}{N_1}.$$

$$\text{und}\quad i_2 = \frac{E\,w_3}{N}\ ,\ i_2' = \frac{E\,w_3}{N_1} \qquad \text{(I)}$$

Werden die Punkte B und C so gewählt, dass $i_2 = i_2'$ ist, und nennen wir φ den Ausschlagswinkel einer in „2" befindlichen Tangentenbussole und D „δ" den Ablesungsfehler, so haben wir, wenn C der Reduktionsfaktor ist,

$$\mathrm{Ctg}\,\varphi\, N \pm \frac{C\,N}{\cos^2\varphi}\,\delta = E\,w_3$$

$$\mathrm{Ctg}\,\varphi\, N_1 \pm \frac{C\,N_1}{\cos^2\varphi}\,\delta = E\,w_3$$

Also

$$(w_1 - w_2)\,w_4 \pm \frac{\delta}{\sin\varphi\cos\varphi}\sqrt{N^2 + N_1^2} = 0$$

und da für $i_2 = i_2'$ auch $N = N_1$ ist:

$$w_1 = w_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\frac{N}{w_4}\cdot\delta \qquad \text{(II)}$$

Soll nun der Widerstand des Elementes für eine gegebene Stromstärke i_1 bestimmt werden, und soll die Aenderung dieser Stromstärke bei der zweiten Einstellung $(i_1' - i_1)$ ein bestimmter Bruchteil d von i_1 sein, so folgt aus (i)

$$N = \frac{E w_{2+3}}{i_1}\ \text{und}\ \frac{w_4}{w_{2+3}} = \frac{i_1' - i_1}{i_1} = \vartheta \qquad \text{(III)}$$

also

$$w_1 = w_2 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\frac{E}{i_1\,\vartheta}\,\delta \qquad \text{(IV)}$$

Aus (III) folgt noch

$$2w_3 w_1 + \vartheta w_3 w_{1+3} = \frac{Ew_{1+3}}{i_1} - w_1(w_1 + \vartheta w_{1+3})$$

$$\vartheta w_3^2 + w_3 \left\{ 2w_1(1+\vartheta) - \frac{E}{i_1} \right\} - \frac{Ew_1}{i_1} + w_1^2(1+\vartheta) = 0$$

$$w_3 = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{E}{2i_1} - w_1(1+\vartheta) + \sqrt{\left(\frac{E}{2i_1} - w_1\right)^2 + w_1^2\vartheta}\right) \qquad \text{(V)}$$

Darin muss die Wurzel das positive Vorzeichen haben, da ihr absoluter Wert immer grösser ist als derjenige des vor ihr stehenden Ausdruckes. Es sind also durch die aufgestellten Forderungen sämtliche Widerstände der Kombination bestimmt, und die Genauigkeit der Messungen ist bei dieser Anordnung nur noch von der Wahl der Tangentenbussole abhängig. Der Fehler wird am kleinsten, wenn der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole gleich $\frac{w_3}{w_{2+3}} i_1$ ist; dann wird

$$i_2 = \text{Ctg}\,\varphi \text{ und } C = i_2 = \frac{w_3}{w_{2+3}} \cdot i_1$$

$\varphi = 45^0$, also der Fehler

$$2\sqrt{2}\,\frac{E}{i_1\vartheta} \cdot \delta$$

und der relative Fehler

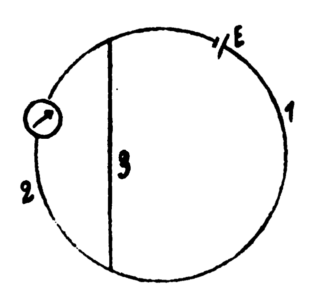
$$2\sqrt{2}\,\frac{E}{i_1 w_1 \vartheta} \cdot \delta$$

B e i s p i e l! Es sei der Widerstand eines Daniell'schen Bechers zu bestimmen. Die elektromotorische Kraft ist dann 1,1 Volt; der Widerstand möge $w_1 = 0{,}5$ Ohm sein, dann ist nach (II) $w_2 = 0{,}5$; die Stromstärke im Element bei der ersten Einstellung sei $i_1 = 0{,}2$ Amp. Wird d = 0,01 genommen, so ist nach (V) $w_3 = 427$ und nach (III) $w_4 = 4127$.

Ist die Tangentenbussole ein Spiegelinstrument, das aus 3 Meter Entfernung mit Fernrohr und Skala beobachtet wird, so kann $\delta = \frac{1}{30000}$ gesetzt werden; und ist ferner der Reduktionsfaktor 0,2, so wird $S = 45^0$ und der relative Fehler gleich 0,104 oder 10,4 Prozent.

Also bei der Anwendung auf ein Daniell'sches Element von gebräuchlicher Beschaffenheit erweist sich die Methode selbst bei Anwendung einer ungewöhnlich empfindlichen Tangentenbussole, und abgesehen von der zeitlichen Aenderung von Widerständen wegen der Grösse des relativen Fehlers als unbrauchbar. Besser wird das Ergebnis, wenn der Widerstand des Elementes grösser ist, für 2 Ohm beträgt z. B. der relative Fehler 2,6 Prozent.

Nach Mouton und Anderen wird der Zweig „3“ zunächst ausgeschaltet und bei



Figur IX.

der zweiten Beobachtung der Widerstand „w_2“ um eine kleine Grösse „l_2“ vermindert. Ist der durch das Galvanometer gehende Strom bei beiden Beobachtungen derselbe, so ist

$$i_2 = \frac{E}{w_{1+2}} = \frac{Ew_3}{w_1 w_3 + w_2' w_3 + w_1 w_2'}$$

worin $w_2' = w_2 - l_2$ also

$$w_2 w_3 = (w_2 - l_2) w_{1+3}$$

und

$$w_1 = \frac{l_2 w_3}{w_2 - l_2}$$

Nun ist durch Einschaltung von w_3 und Verminderung von w_2 die Intensität i_1 vergrössert.

B e i s p i e l: Wenn wir wieder dieselbe Untersuchung nach dieser Methode ausführen wollen, so sind:

$$\begin{cases} N = w_{1+2} \\ N' = \dfrac{w_1 (w_3 + w_2')}{w_3} + w_2' \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Ctg}\varphi N \pm \frac{CN}{\cos^2\varphi}\delta = E \\ \operatorname{Ctg}\varphi N' \pm \frac{CN^1}{\cos^2\varphi}\delta = E \end{aligned}\right\}$$

also

$$l_2 + \frac{w_1 w_2'}{w_3} \pm \frac{\delta N \sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\varphi} = 0$$

oder

$$w_1 = \frac{l_2 w_3}{w_2'} \pm \frac{w_3}{w_2'} \cdot \frac{N\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\varphi} \cdot \delta$$

und der relative Fehler

$$\frac{w_3}{w_1 w_2'} \cdot \frac{N\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\varphi} \cdot \delta$$

Sollen auch $E = 1{,}1$, $w_1 = 0{,}5$ Ohm, $i_1 = 0{,}2$ und $\vartheta = 0{,}01$ sein, so müssen $w_{1+2} = \frac{1{,}1}{0{,}2} = 5{,}5$ und $w_2 = 5$ Ohm gesetzt werden. Damit wäre, wenn W für $\frac{w_2' w_3}{w_2^1 + w_3}$ geschrieben würde

$$\vartheta + 1 = \frac{i_1'}{i_1} = \frac{w_1 + w_2}{w_1 + W}$$

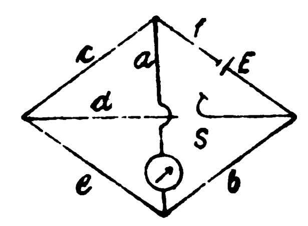
Also $W = 4{,}94$.
Aber auch ist

$$w_2{}^1 = \frac{w_2 w_3}{w_1 + w_3}$$

Daraus muss $w_3 = 453\ \Omega$. Mit obiger Tangentenbussole wird der Relativfehler

$$\frac{453}{0{,}5 \cdot 4{,}9} \cdot \left(\frac{2 \cdot 5{,}5 \sqrt{2}}{30000}\right) = 0{,}09$$

oder 9 Prozent, wenn die Bussole so beschaffen ist, dass ihr Reduktionsfaktor $= 0{,}2$ ist. Nach Mance wird die Wheatstone'sche Brücke benutzt, und das Element in einen Zweig (f) geschaltet. Die Widerstände werden so ausgeglichen, dass durch das Oeffnen und Schliessen des Schlüssels „S" in dem Zweige „d" keine Aenderung der Intensität „i_a" in dem Galvanometer zu beobachten ist.



Figur X.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass dies der Fall ist, wenn $w_b\, w_c = w_e\, w_f$ ist.

Wir haben für die Intensität

$$i_a = \frac{w_d\, w_e + w_c\, w_b + d + e}{J\,(w_f + W_f)} \cdot E$$

Für $w_b\, w_c = w_e w_f$ wird dieser Ausdruck gleich

$$\frac{w_e}{w_b\, w_c + w_a\, w_b + w_b\, w_e + w_a\, w_e}$$

Er ist also von „w_d“ unabhängig.

Nun ist die Intensität in dem das Element enthüllenden Zweig

$$i_f = \frac{E}{w_f + W_f}$$

oder

$$i_f = \frac{E}{w_f + w_{c+d,\,b+a}\,\dfrac{w_e + w_{c,\,d} + w_{b,\,a}}{w_e + w_{b+d,\,a+c}}}$$

Bei geschlossenem Schlüssel ist w_d sehr nahe gleich 0, aber bei geöffnetem „S“ gleich ∞. Obiger Ausdruck geht also plötzlich aus

$$i_f = \frac{E}{w_f + \dfrac{w_e\,w_c\,w_{a+b} + w_a\,w_b\,w_c}{w_e\,w_{a+b+c} + w_b\,w_{a+c}}}$$

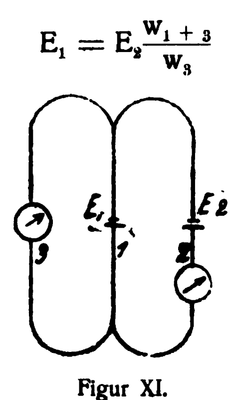
in

$$i_f = \frac{E}{w_f + w_b + w_{a,\,c+e}}$$

über. Es kann also eine beträchtliche Aenderung in der Stromstärke hervorgebracht werden.

v. Waltenhofen benutzt die auf Seite 32 angegebene Poggendorf'sche Stromverzweigung. Soll z. B. der Widerstand „w_2“ bestimmt werden, so macht man E_2 stromlos. Es ist dann wie auf S. 34

$$E_1 = E_2 \frac{w_{1+3}}{w_3}$$



Figur XI.

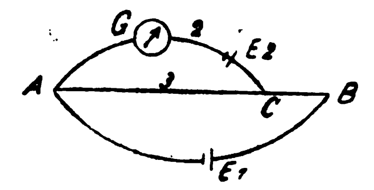
Verändert man den Widerstand „w_1“ um „dw_1“ und dadurch „i_3“ um „di_3“ und i_2 um di_2, so ist

$$w_2 = w_3 \frac{-\,di_3}{di_2}$$

di_2 und di_3 lassen sich durch zwei Galvanometer in „2“ und „3“ bestimmen.

Die Formel zeigt, dass die Methode mit einiger Genauigkeit bei Elementen von mässigem Widerstand (einige Ohm) nur angewandt werden kann, wenn ihre elektromotorische Kraft (E_2) klein gegen E_1 ist.

In ähnlicher Weise verwendet Beetz die auf Seite 55 dargestellte Du Bois Reymond'sche Anordnung.



Figur XII.

Der Widerstand von E_1 wird gemessen, und die Säule E_2 kompensiert. Wie oben erwähnt ist dann

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_{1+3}}{w_3}$$

Ist „w“ der Widerstand der Säule E_1, a_1 der übrige Widerstand im Kreis $ACBE_1$, so ist

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w + a_1}{w_3}$$

Eine zweite Einstellung, wobei „a“ geändert wird, und der Schleifkontakt C verschoben wird, liefert

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w + a_2}{w_3'}$$

und somit

$$w = \frac{a_2 w_3 - a_1 w_3'}{w_3' - w_3}$$

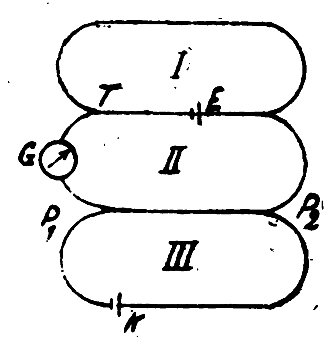
Der Zweig $A E_1 B$ wird nur momentan geöffnet. Das Verfahren ist dasselbe wie schon auf Seite 55 angegeben, und die Bemerkungen dazu gelten auch hier.

Von den Wechselstrommethoden ist die bekannteste die von Kohlrausch. Ein Telephon wird in den Galvanometerzweig der Mance'schen Anordnung eingeschaltet, und der Wechselstrom durch ein kleines Induktorium erzeugt. Häufig ist die Einstellung des Schleifkontaktes sehr unsicher, und das Tonminimum nur ungefähr zu schätzen.

Greeff bestimmt den Widerstand aus

$$E - e = iw$$

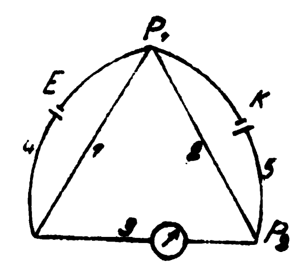
worin „e" die Polspannung ist. Der Strom wird in dem einfachen Kreis „I" zuerst auf die gegebene Intensität gebracht und die Intensität mittels eines Torsiongalvanometers gemessen. Ein Doppeltaster T gestattet den Stromkreis I zu öffnen, und gleichzeitig II zu schliessen, und hiernach wieder I zu schliessen.



Figur XIII.

Der Stromkreis III enthält eine Säule K, wodurch E kompensiert wird. Wird nun T niedergedrückt, so ist damit I geöffnet und II geschlossen. Zeigt das Galvanometer G **keinen** Ausschlag, so ist E durch K kompensiert, d. h. die elektromotorische Kraft E ist der Spannungsdifferenz $P_1 P_2$ gleich. Danach wird der Hebel T losgelassen und der Stromkreis I geschlossen. Der Ausschlag in G zeigt jetzt die Grösse $E - e$ und daraus wird $w = \frac{E - e}{i}$ berechnet. Durch eingeschaltete Widerstände in I kann man der Intensität „i" beliebige Werte erteilen. Dass E nicht in beiden Beobachtungen genau denselben Wert hat, giebt Verfasser zu; aber er behauptet, dass der Unterschied keinen grossen Fehler in dem Resultat verursachen könne.

Diese Anordnung ist dieselbe wie die auf Seite 59 beschriebene Feussner'sche, schon 1867 veröffentlichte Methode. In der auf Seite 86 gegebenen Figur sind E und K umzutauschen



Figur XIV.

Bei w_1 = unendlich entspricht dann die Figur der ersten Greeff'schen Einstellung. Wird nun „w_1" endlich gemacht, so entspricht die Figur der zweiten Einstellung. Bei $i_3 = 0$ ist nämlich

$$K w_2 v_1 = E w_1 v_2$$

und bei $w_1 = \infty$ geht diese Gleichung in

$$K w_2 = E v_2$$

über.

Nun ist

$$i_2 w_2 + i_5 w_5 = K$$

und da

$$i_3 = 0,\ i_2 w_2 = K \frac{w_2}{v_2}$$

sind, wird obige Gleichung

$$E = i_2 w_2$$

oder $E =$ Spannungsunterschied zwischen $P_1 P_2$, also gleich der ersten Greeff'schen Gleichung. In der zweiten Einstellung ist

$$i_1 w_1 = E - i_4 w_4$$

was dasselbe ist wie

$$e = E - i_4 w_4$$

wenn wir für $i_1 w_1$ die Spannungsdifferenz „e" in „1" schreiben.

Der einzige Unterschied besteht also darin, dass nach dieser Methode die Stromstärke „i_4" und die Spannung „e" direkt gemessen, und bei der anderen aus den Widerständen abgeleitet werden.

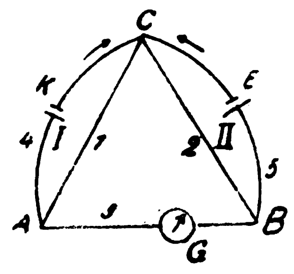
In dieser Bestimmung ist „i_4" bei dem ersten Versuch, $E - e$ bei dem zweiten gemessen worden. Die Resultate auf Seite 93 zeigen aber deutliche Aenderung in E; denn im ersten Fall ist E kompensiert, im zweiten nicht.

V. Angewandte Methode.

(I.) Nach solchen Betrachtungen, wie sie oben angedeutet wurden, war es wahrscheinlich, dass die besten Resultate erhalten würden durch irgend eine Modifikation der einfachen zuerst von Feussner angegebenen Methode. Sie wurde gewählt, weil sie gestattet die elektromotorische Kraft und den Widerstand bei jeder Intensität gleichzeitig zu bestimmen.

Im Wesentlichen besteht diese Methode in der Schaltung zweier elektromotorischen Kräfte in zwei einfachen Stromkreisen, wobei die eine elektromotorische Kraft als „Normale" dient, während die andere gemessen wird.

Die Intensität des Kreises I wird durch Einschalten grosser Widerstände sehr klein gemacht, und dadurch diese elektromotorische Kraft während des Versuches ziemlich konstant erhalten. Der Stromkreis II enthält die zumessende Säule E_1, deren Intensität beliebig geändert wird, und in dem die beiden Stromkreise verbindenden Draht befindet sich ein Galvanometer; es werden nun zwei Punkte A und B gleichen Potentials ausgesucht.



Figur XV.

Fliesst kein Strom durch AB, so ist

$$E \frac{w_2}{w_{2+5}} = K \frac{w_1}{w_{1+4}}$$

oder

$$E w_2 v_1 = K w_1 v_2 \qquad \text{(I)}$$

worin E und K die zwei elektromotorischen Kräfte bedeuten, und „v_1“ und „v_2“ für w_{1+4} und w_{2+5} geschrieben sind. Werden Widerstände l_4 und l_5 in 4 und 5 eingeschaltet, so ist

$$E w_2 (v_1 + l_4) = K w_1 (v_2 + l_5)$$

und daraus

$$E w_2 l_4 = K w_1 l_5$$

oder

$$E = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{l_5}{l_4} \cdot K$$

Schalten wir Widerstände l_2 und l_5 in w_2 und w_5, so ist

$$E (w_2 + l_2) v_1 = K w_1 (v_2 + l_2 + l_5)$$

und somit

$$E l_2 v_1 = K w_1 (l_2 + l_5)$$

oder, mit Rücksicht auf (I)

$$w_5 = w_2 \frac{l_5}{l_2} \cdot$$

$\frac{E}{K}$ ist also durch w_1, w_2, l_5, l_4 bestimmt und w_5 durch dasselbe, wenn wir auch l_2 wissen

Die Zweige „1“ und „2“, deren Widerstand wir als bekannt voraussetzen, enthalten weder Säule noch Galvanometer, können also mit Sicherheit gemessen werden. Die zugeschalteten Widerstände „l_2“ und „l_5“ müssen so klein gewählt werden, dass ihr Einfluss auf die Stromstärke in E vernachlässigt werden kann. Es bedarf auch nur dreier Beobachtungen für die zwei Bestimmungen.

(II.) Für praktische Zwecke aber ist die elektromorische Kraft zu bestimmen durch einmalige Beobachtung unter Benutzung der Gleichung

$$E = K \frac{w_1 v_2}{w_2 v_1}$$

Solche Beobachtungen sind offenbar von der Beständigkeit der zu messenden Grössen unabhängig, und lassen sich sehr schnell machen. Eine solche Bestimmung wurde mittels zweier Akkumulatoren ausgeführt. Der eine, der als E diente, war durch ungefähr 100 Ohm geschlossen. Der andere (K) durch 10000 Ohm. Die Widerstände waren

$$w_1 = 10000, \; w_2 = 100$$

$$w_4 = 53{,}4 \text{ (bis } 59{,}1) + 0{,}03$$

$$w_5 = 1{,}03 \text{ also } v_1 = (10053{,}4 \text{ bis } 10059{,}1) + 0{,}03$$

$$v_2 = 100 + 1{,}03$$

worin die Widerstände der Akkumulatoren (inklusive Verbindungsdrähte), zu je 0,03 angenommen wurden, und w_5 einen 1 Ohm Normalwiderstand enthielt.

$\frac{E}{K}$ sank während 5 Stunden von 1,004930 auf 1,004368 herab, und stieg v_1 von 10053,44 bis 10059,06.

Während der Zeit war beständiges Gleichgewicht niemals zu bekommen. Man müsste fortwährend kleine Widerstände in w_4 zusetzen, um die Nadel auf Null zu halten. Gegen etwa 10000 Ohm in v_1 kommen solche kleine Widerstände nicht in Betracht, und die Bewegung der Nadel in dem Galvanometer, die stundenlang in demselben Sinne gewesen ist, ist wahrscheinlich auf zeitliche Veränderungen in elektromotorischer Kraft zurückzuführen. Solche zeitliche Veränderungen sind bei sämtlichen anderen Versuchen beobachtet.

Als Messinstrument diente ein astatisches Spiegelgalvanometer.

Die inneren Widerstände der Elemente, die auch in obigen v_1 und v_2 enthalten sind, waren unbekannt, jedenfalls aber nicht grösser als 0,001 v_2 bezw. 0,0001 v_1. Nun dienten als Widerstände gewöhnliche Stöpselrheostaten, die nur bis etwa $\frac{1}{1000}$ als richtig anzunehmen sind. Die inneren Widerstände sind also kleiner als der Fehler in den Rheostaten, und daher die Genauigkeit ebenso gross, wie bei einer zweimaligen Beobachtung mit demselben Apparat.

Die Resultate sind in untenstehender Tabelle angegeben.

3.

v_1	$\frac{E}{K}$	Zeit
10000 + 53,44	1,004930	5 h 12,2 m
„ + 53,65	1,004909	„ 15,5 „
„ + 53,80	1,004894	„ 17,5 „
„ + 54,18	1,004863	„ 22,0 „
„ + 54,51	1,004823	„ 28,5 „
„ + 54,72	1,004802	„ 32,2 „
„ + 54,93	1,004781	„ 38,6 „
„ + 55,24	1,004750	„ 43,5 „
„ + 55,40	1,004734	„ 48,5 „
„ + 55,50	1,004724	„ 51,2 „
„ + 55,59	1,004715	„ 54,0 „
„ + 55,70	1,004704	„ 57,0 „
„ + 55,81	1,004693	6 h 0,3 „
„ + 55,90	1,004684	„ 3,2 „
„ + 56,00	1,004674	„ 7,0 „
„ + 56,11	1,004663	„ 11,0 „
„ + 56,30	1,004644	„ 18,5 „
„ + 56,60	1,004614	„ 32,0 „
„ + 56,70	1,004604	„ 37,0 „
„ + 56,90	1,004584	„ 47,5 „
„ + 59,00	1,004377	9 h 57,0 „
„ + 59,03	1,004372	10 h 2,2 „
„ + 59,05	1,004369	„ 4,0 „
„ + 59,06	1,004368	„ 7,0 „

IV. Die Genauigkeit der obigen Resultate ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

$$i_3 = \frac{E\frac{w_2}{v_2} - K\frac{w_1}{v_1}}{w_3 + \frac{w_1 w_4}{v_1} + \frac{w_2 w_5}{v_2}}$$

$$E = \frac{v_2 w_1}{v_1 w_2} K \pm \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{N}{\mu}$$

worin

$$N = w_3 + \frac{w_1 w_4}{v_1} + \frac{w_2 w_5}{v_2}$$

$$\mu = \frac{w_2}{v_2}$$

sind, und $\frac{\delta}{\alpha}$ ihre frühere Bedeutung hat, also ungefähr $4 \cdot 10^{-9}$ bei dem betrachteten Galvanometer.

N ist hier etwa 66, und der von der Unsicherheit der Ablesungen herrührende Fehler $\frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{N}{\mu}$ ist $13 \cdot 10^{-8}$ d. h. eine Einheit in der siebenten Dezimalstelle, oder ein Zehnmillionstel des Wertes von $\frac{E}{K}$. Damit hat man dieselbe Genauigkeit wie bei einem Fehler von 0,0001 mm in einer Längenbestimmung von einem Meter, d. i. eine entschieden grössere als bei den anderen Methoden.

Will man auch den von der Unsicherheit der Widerstände herrührenden Fehler in Betracht ziehen, so ist der Ausdruck dafür

$$\delta\frac{E}{K} = \sqrt{\left\{\left(\frac{v_2 w_4}{v_1^2 w_2}\right)^2 \delta w_1^2 + \left(\frac{w_5 w_1}{w_2^2 v_1}\right)^2 \delta w_2^2 + \left(\frac{w_1 v_2}{v_1^2 w_2}\right)^2 \delta w_4^2 + \left(\frac{w_1}{w_2 v_1}\right)^2 \delta w_5^2\right\}}$$

$$\frac{\delta\frac{E}{K}}{\frac{E}{K}} = \sqrt{\left\{\left(\frac{w_4}{v_1 w_1}\right)^2 \delta w_1^2 + \left(\frac{w_5}{w_2 v_2}\right)^2 \delta w_2^2 + \left(\frac{1}{v_1}\right)^2 \delta w_4^2 + \left(\frac{1}{v_2}\right)^2 \delta w_5^2\right\}}$$

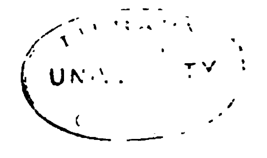
Da die Widerstände der Stöpselrheostaten auf 0,1 % genau garantiert zu werden pflegen, so ist für $\frac{\delta w_1}{w_1}$ sowie $\frac{\delta w_2}{w_2}$ etwa 0,0005 zu setzen. In w_4 und w_5 stehen die nur sehr roh geschätzten Widerstände der Elemente. Den dadurch bedingten Fehler wollen wir zu etwa 0,02 annehmen. Dann ist $\frac{\delta w_4}{v_1}$ auf etwa 2.10^{-6}, $\frac{\delta w_5}{v_2}$ auf etwa 2.10^{-4} zu schätzen, und daher

$$\frac{\delta\frac{E}{K}}{\frac{E}{K}} = \text{etwa } \mathbf{2.10^{-4}}$$

Also wenn der Fehler in w_4 und w_5 ebenso gross angenommen wird wie der innere Widerstand, wäre das Resultat bis zur vierten Decimalstelle als richtig zu betrachten. Aber selbst wenn die Widerstände der Elemente nicht genauer bestimmt sind, ist das Verhältnis $\frac{E}{K}$ mit der obigen Genauigkeit gemessen.

V. Widerstand. Es wurde auch der Versuch gemacht, den inneren Widerstand in ähnlicher Weise zu bestimmen. Die elektromotorische Kraft des einen Akkumulators wurde zunächst gemessen. Dieses ergab $K = 2{,}0366$ Volt. Eine Bestimmung von $\frac{E}{K}$, worin E die elektromotorische Kraft des anderen Akkumulators ist, lieferte

$$\frac{E}{K} = 100. \frac{100{,}0175}{10064{,}46}$$
$$= 0{,}9937714$$



also

$$E = 2{,}02395 \text{ Volt.}$$

Nach einem früheren Versuch mit einem Normal-Element entspricht eine Stromstärke von $3{,}076.10^{-6}$ Ampère einem Ausschlag von 62 Skalenteilen. Danach würden also $4{,}961.10^{-8}$ (log $\bar{8}{,}6956$) Ampère einen Skalenteilausschlag bewirken.

Es war zuerst:

$$w_2 = 100, \; w_1 = 10\,000$$

Der Akkumulator (B) in „5"; in „4" der Akkumulator (A) und dazu 64,5 Ω geschaltet.

Dann wurden 5 Ohm in „2" zugeschaltet. Wäre nun die elektromotorische Kraft unverändert geblieben, dann würde durch diese Zuschaltung sofort eine ganz bestimmte Aenderung der Stromstärke eingetreten sein; diese Aenderung würde dann eine neue, dieser Stromstärke entsprechende Ruhelage der Galvanometernadel bedingt haben und die Nadel sich in gewöhnlicher Weise nach einer gewissen Anzahl von Schwingungen in diese neue Ruhelage eingestellt haben. Das trat aber nicht ein. Vielmehr zeigte sich, dass die durch die erste Schwingung der Nadel angedeutete Ruhelage sich zuerst rasch, dann langsamer in dem Sinne des ersten Ausschlags änderte. Es war das jedenfalls eine Folge der elektromotorischen Kraft „E". Eine einfache Berechnung zeigt, dass „K" dagegen als unverändert betrachtet werden kann.

Aus

$$i_3 = \frac{K\frac{w_1}{v_1} - E\frac{w_2}{v_2}}{w_3 + \frac{w_2 w_5}{v_2} + \frac{w_1 w_4}{v_1}}$$

$$= \frac{K\frac{w_1}{v_1} - E\frac{w_2}{v_2}}{N}$$

haben wir

$$\frac{\partial i_4}{\partial w_2} = \frac{-EN\frac{w_5}{v_2^2}}{N^2} = \frac{-E\frac{w_5}{v_2^2}}{N}$$

wenn i_3 zuerst $= 0$ ist.

Also

$$w_5 = \frac{N v_2^2}{E \partial w_2} \cdot \partial i_3 .$$

Danach wäre es möglich w_5 zu bestimmen, wenn die Ruhelage sich während der Schwingungen nicht änderte; da dies aber, wie gezeigt, der Fall ist, so kann die Gleichung nicht in dieser Weise benutzt werden. Wohl aber kann aus ihr ein Grenzwert für w_5 berechnet werden.

Nach Einschaltung von ∂w_2 bekommt man aus dem ersten Ausschlag der Nadel einen Wert von „i_3“, der jedenfalls nicht kleiner ist als sein wahrer Wert. Setzen wir diesen Wert für „i_3“ in die Gleichung, so haben wir eine Bestimmung von „w_5“, die als Maximum-Wert betrachtet werden kann. Es war in diesem Versuch beim Uebergang von $w_2 = 100$ zu $w_2 = 105$, der erste Ausschlag 5,1 Skalenteile (das Mittel aus mehreren Beobachtungen). Danach ist

$$\partial i_3 = 5{,}1 \,.\, 4{,}961 \,.\, 10^{-8}$$

$$w_3 = 6, \qquad \frac{w_1 \, w_4}{v_1} = 64{,}09$$

$\frac{w_2 \, w_5}{v_2}$ kann vernachlässigt werden. Also $N = 70{,}09$

$$\begin{aligned}
\log N &= 1{,}84565 \\
\log v_2^2 &= 4{,}00000 \\
\log 5{,}1 &= 0{,}70757 \\
\log 4{,}961.10^{-8} &= 0{,}69567 - 8 \\
C \log E &= 9{,}69380 - 10 \\
C \log 5 &= 9{,}30103 - 10 \\
\hline
\log w_5 \;\; & \;\; 0{,}24375 - 2 \\
w_5 &= 0{,}01753
\end{aligned}$$

w_5 ist jedenfalls nicht grösser als 0,01753.

VI. Ueber den Einfluss der Aenderung von E auf eine Bestimmung von w_5.

Aus der Gleichung

$$K \frac{w_1}{v_1} - E \frac{w_2}{v_2} = 0$$

haben wir

$$K \frac{10\,000}{10\,061{,}23} - E \frac{100}{100{,}017} = 0,$$

wenn nach dem obigen Versuch $w_5 = 0{,}017$ für den Widerstand des Elementes angenommen wird.

Bei Hinzufügung von 0,01 Ω in w_5 muss nun, wenn E unverändert bleibt, l_2 in w_2 hinzugefügt werden, damit das Galvanometer auf 0 einsteht. Dafür gilt die Gleichung

$$\frac{v_2}{w_2} = 1 + \frac{0{,}017}{100}$$

$$= 1 + \frac{0{,}027}{100 + l_2}$$

also

$$l_2 = 58{,}83$$

In 2 hätte man danach einen Widerstand von 158,83 Ohm haben müssen.

Die Beobachtung ergab dagegen 110 Ohm, wobei in w_4 61,80 Ohm einzuschalten waren.

Schreibt man den jetzigen Wert von E:

$$E + \triangle E$$

so ist

$$K \frac{10\,000}{10\,061{,}80} - (E + \triangle E) \frac{110}{110{,}027} = 0$$

woraus folgt

$$1 + \frac{\triangle E}{E} = 1{,}000018$$

$$\triangle E = 0{,}000018\ E.$$

Hätte man aber unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit von E den Widerstand w_5 aus den beiden Gleichungen

$$K \frac{10000}{10061{,}23} - E \frac{100}{100 + w_5}$$

$$K \frac{10000}{10061{,}80} - E \frac{110}{110 + w_5 + 0{,}01} = 0$$

berechnet, so hätte sich ergeben

$$\frac{10061{,}80}{10061{,}23} = \frac{110{,}01 + w_5}{100 + w_5} \cdot \frac{10}{11}$$

$$w_5 = \mathbf{0{,}0377}$$

mehr als das Doppelte des wahren Wertes.

VII. Zweckmässigste Anordnung für diese Methode.

Um die beste Anordnung zu finden, wollen wir die Intensität in dem Zweige „3" bei einem kleinen Potential-Unterschied zwischen A und B näher untersuchen.

Aus dem in II gegebenen Satz folgt

$$i_3 = \frac{E \frac{w_2}{v_2} - K \frac{w_1}{v_1}}{w_3 + \frac{w_1 w_4}{v_1} + \frac{w_2 w_5}{v_2}}.$$

Wenn wir also bei einer Nullpunktsablesung des Galvanometers einen Strom von $\frac{\delta}{\alpha}$ annehmen, so ist

$$\frac{\delta}{\alpha} N = K w_1 v_2 - E v_1 w_2$$

worin

$$N = w_3 v_1 v_2 + w_1 w_4 v_2 + w_2 w_5 v_1$$

ist.

Bei Zuschaltung von l_4 und l_5 ist

$$\frac{\delta}{\alpha} N' = K (v_2 + l_5) w_1 - E (v_1 + l_4) w_2$$

worin

$$N' = N + (w_3 v_1 + w_2 v_1 + w_1 w_4) l_5 + \left\{ (w_5 + l_5) w_{1+2+3} + w_2 w_3 + w_1 w_2 \right\} l_4$$

ist.

Daraus folgt

$$\frac{\delta}{\alpha} \sqrt{N^2 + N_1^2} = K l_5 w_1 - E l_4 w_2$$

$$E = K \frac{l_5 w_1}{l_4 w_2} \pm \frac{\delta}{\alpha} \frac{\sqrt{N^2 + N_1^2}}{l_4 w_2}$$

Der aus der Unsicherheit der Ablesung zu erwartende Fehler ist daher

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} \frac{\sqrt{N^2 + N_1^2}}{l_4 w_2}$$

oder

$$\pm \sqrt{2} \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{N}{l_4 w_2}$$

wenn wir N und N_1 als gleichwertig betrachten; um eine möglichst genaue Bestimmung zu erhalten, müssen wir also die Grössen, über welche wir in diesem Fehlerausdruck verfügen können, so wählen, dass er ein Minimum wird. Wir setzen dabei voraus, dass die Unsicherheit der übrigen bei der Messung verwendeten Grössen so klein sei, dass der dadurch verursachte Fehler gegenüber dem aus dem Ablesungsfehler hervorgehenden vernachlässigt werden darf.

In N sind enthalten die Widerstände $w_1 \ldots . w_5$.

Zwischen diesen und den elektrischen Kräften und den Grössen l_4 und l_5 bestehen die Gleichungen

$$K v_2 w_1 - E v_1 w_2 = 0$$
$$K l_5 w_1 - E l_4 w_2 = 0$$

Es sei die elektrische Kraft E des in 5 eingeschalteten Elementes zu bestimmen und zwar in einem Stromkreis vom gegebenen Widerstand v_2. Bei den zwei aufeinanderfolgenden Einstellungen, welche zur Messung erforderlich sind, muss

E als unveränderlich betrachtet werden können. Dazu ist, wie wir schon gesehen haben, nötig, dass der Widerstand seines Stromkreises nur um einen verhältnismässig kleinen Betrag geändert wird.

Wir haben diesen zuzufügenden Widerstand l_5 genannt; es ist also $l_5 = \vartheta v_2$, worin ϑ als ein gegebener kleiner Bruch anzusehen ist. Zeitliche Aenderungen von E sollen gemessen werden; dazu ist nötig, dass während der Dauer der Beobachtungen die elektrische Kraft „K" des Vergleichselementes unverändert bleibt. Das Element „K" darf deshalb nur von einem schwachen Strom durchflossen werden, dessen Intensität $\frac{K}{v_1}$ wir also auch als eine gegebene kleine Grösse zu betrachten haben. Wir bezeichnen sie durch $\frac{1}{m}$, und „m" mindestens gleich 10000.

Wir haben also für die Fehlerrechnung das Gleichungssystem

$$K v_2 w_1 - E v_1 w_2 = 0; \quad K l_5 w_1 - E l_4 w_2 = 0;$$

$$l_5 = \vartheta w_2; \; \frac{v_1}{K} = m; \; v_1 = w_{1+4}; \; v_2 = w_{2+5}$$

Grössen, über welche nicht weiter verfügt werden kann, sind hierin: E, v_2, ϑ, m; beliebig angenommen können dagegen werden: K, w_2, w_3, und die Aufgabe besteht darin, diese so zu wählen, dass E möglichst genau bestimmt wird. Die übrigen Grössen v_1, w_1, w_4, w_5, l_4, l_5 sind durch die Gleichungen gegeben, und mittels derselben aus dem Fehlerausdruck zu eliminieren, sodass dieser nur die gegebenen und die zu bestimmenden enthält.

Wir bekommen

$$\sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{N}{l_4 w^2} = \sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{1}{l_4 w_2} \left\{ w_3 v_1 v_2 + w_1 w_4 v_2 + w_2 w_5 v_1 \right\}$$

und mit Rücksicht auf obige Gleichungen ist dieser Ausdruck

$$= \sqrt{2}\frac{\delta}{\alpha} \frac{v_2}{v_1 l_5} \cdot \frac{v_1 v_2}{w_2} \left\{ w_3 + \frac{w_2 (v_2 - w_2)}{v_2} + \frac{w_1 (v_1 - w_1)}{v_1} \right\}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\delta}{\alpha}\,\frac{v_2^2}{l_5\,w_2}\left\{w_3 + \frac{w_2\,(v_2 - w_2)}{v_2} + \frac{m\,E\,w_2}{v_2}\left(1 - \frac{E\,w_2}{K\,v_2}\right)\right\}$$

Der von w_2 abhängige Teil der Klammer ist

$$\frac{w_3}{w_2} - \frac{w_2}{v_2}\left(1 + \frac{m\,E^2}{K\,v_2}\right)$$

Er wird am kleinsten, wenn „w_2" möglichst gross genommen wird. Für ‚w_2' bestehen aber zwei Grenzgleichungen. Bezeichnen wir durch ‚w_e' den Widerstand des Elementes in ‚5', durch w_k den des Elementes in ‚4', so ist zunächst

$$w_2 \leqq v_2 - w_e$$

sodann, da $v_1 = mK_1\ w_1 = \frac{Em\,w_2}{v_2}$ also $w_4 = m\ (K - E\,\frac{w_2}{v_2})$ und dieses mindestens gleich w_k ist

$$w_2 \leqq \frac{v_2}{E}\left(K - \frac{w_k}{m}\right).$$

Ist also

$$\frac{v_2}{E}\left(K - \frac{w_k}{m}\right) > v_2 - w_e$$

oder

$$\frac{K}{E} > 1 - \frac{w_e}{v_2} + \frac{w_k}{m\,E}$$

so ist der grösstmögliche Wert, den w_2 annehmen kann,

$$v_2 - w_e.$$

Setzen wir dies in den Fehlerausdruck ein, so ergiebt sich, dass K möglichst klein, also möglichst nahe an $E\left(1 - \frac{w_e}{v_2} + \frac{w_k}{m\,E}\right)$ zu wählen ist.

Ist dagegen

$$\frac{K}{E} < 1 - \frac{w_e}{v_2} + \frac{w_k}{m\,E},$$

so ist für w_2 der grösstmögliche Wert

$$\frac{v_2}{E}\left(K - \frac{w_k}{m}\right).$$

Setzen wir diesen, den wir zur Abkürzung durch $aK - b$ bezeichnen wollen, in den Fehlerausdruck, so werden die mit K behafteten Glieder, abgesehen von dem konstanten Faktor,

$$\frac{w_3}{aK - b} - \frac{aK}{v_2} + \frac{b\,m\,E^2}{K\,v_2^2}.$$

Daraus folgt, das für K ein möglichst grosser Wert zu wählen ist, also ebenfalls möglichst nahe an

$$E\left(1 - \frac{w_e}{v_2} + \frac{w_k}{m\,E}\right).$$

VIII. Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welcher Weise die Empfindlichkeit der Methode mit der Entfernung von diesem günstigsten Wert von K abnimmt. Wir legen dabei die Verhältnisse, wie sie bei unserem Versuch bestanden, zu Grunde. $v_1 = 20000$, $w_2 = 99$, $v_2 = 100$.

Dann hat das letzte Glied des früher gegebenen Ausdruckes

$$v_1 \frac{E}{K} \frac{w_2}{v_2}\left(1 - \frac{E}{K} \frac{w_2}{v_2}\right)$$

die folgenden Werte:

$$1527{,}78 \quad \text{für} \quad \frac{E}{K} = \frac{1}{1{,}08}.$$

$$915{,}308 \quad „ \quad \frac{E}{K} = \frac{1}{1{,}04}$$

$$198 \quad „ \quad \frac{E}{K} = 1$$

$$2887{,}5 \quad „ \quad \frac{E}{K} = \frac{1}{1{,}2}$$

$$4999{,}5 \quad „ \quad \frac{E}{K} = \frac{1}{2}$$

Wenn die Widerstände w_e und w_k beider Elemente bekannt sind, kann, wie schon bemerkt, das Verhältnis der elektrischen Kräfte durch e i n e Einstellung gefunden werden.

Der Fehler ist hier:

$$\frac{\delta}{\alpha}\frac{v_2}{w_2}\left\{\left(w_3+\frac{w_2(v_2-w_2)}{v_2}\right)+\frac{m E w_2}{v_2}\left(1-\frac{E w_2}{K v_2}\right)\right\}$$

also unter sonst gleichen Umständen nur etwa der hundertvierzigste Teil $\left(\frac{\sqrt{2}\, v_2}{l_5}=\frac{\sqrt{2}}{d}=141\right)$ desjenigen beim eben erörterten Verfahren. Dieses Verfahren ist besonders anwendbar, wenn die Widerstände der Elemente gegen die ihrer Stromkreise v_1 und v_2 vernachlässigt werden dürfen, oder wenn es sich um die Aenderung der elektrischen Kraft handelt.

Ist
$$\log\frac{\delta}{\alpha}=\overline{9},6126394$$
$$\frac{K}{E}=1{,}08 \text{ und } l_5=0{,}01$$
$$v_2=1,$$
so ergiebt sich für die zweite Methode ein Fehler von

0,09 %.

IX. Um ähnliche Gleichungen für die Widerstandsbestimmung abzuleiten, haben wir:

$$\frac{\delta}{\alpha}N=K v_2 w_1-E v_1 w_2$$
$$\frac{\delta}{\alpha}N_1=K(v_2+l_2+l_5)w_1-E v_1(w_2+l_5)$$

worin

$$N_1=N+(l_2+l_5)(w_1 w_3+w_3 w_4+w_1 w_4$$
$$+v_1(w_2 l_5+w_5 l_2+l_2 l_5)$$

ist, also wenn $N=N_1$ geschrieben wird, was erlaubt ist, da N_1 nur wenig über 1 % grösser ist als N, wenn $\vartheta=0{,}01$ angenommen wird,

$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{w_2} = \dfrac{E}{K}\dfrac{v_1}{w_1} \pm \dfrac{\delta}{\alpha}\dfrac{N}{K w_1 w_2} \\ \dfrac{v_2 + l_{2+5}}{w_2 + l_2} = \dfrac{E}{K}\dfrac{v_1}{w_1} \pm \dfrac{\delta}{\alpha}\dfrac{N}{K w_1 (w_2 + l_2)} \end{cases}$$

$$\frac{w_5 l_2 - w_2 l_5}{w_2 (w_2 + l_2)} = \pm \frac{\delta}{\alpha} N \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{w_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{w_2 + l_2}\right)^2\right\}} \frac{1}{K w_1}$$

$$w_5 = w_2 \frac{l_5}{l_2} \pm \frac{\delta}{\alpha} N \frac{w_2 (w_2 + l_2)}{l_2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{K w_1 w_2}$$

$$w_5 = w_2 \frac{l_5}{l_2} \pm \frac{\delta}{\alpha} N \sqrt{2} \frac{w_2}{l_2 K w_1}$$

wenn wir in dem letzten Glied l_2 gegen w_2 vernachlässigen.

Der Fehlerausdruck ist also

$$\pm \frac{\delta \sqrt{2}}{\alpha} \cdot \frac{w_2}{K l_2 w_1} N$$

Nun ist bei der Bestimmung der elektrischen Kraft der entsprechende Ausdruck

$$\pm \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \cdot \frac{N}{l_4 w_2}$$

oder der relative Fehler bei einer Bestimmung von $\dfrac{E}{K}$

$$= \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \cdot \frac{N}{K w_2 l_4} \cdot \frac{K}{E}$$

$$= \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \cdot \frac{N}{E w_2 l_4}$$

und bei einer Bestimmung von w_5

$$= \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{2} \cdot \frac{N w_2}{K w_1 w_5 l_2}$$

und mit Rücksicht auf

$$l_4 = \frac{K}{E} \cdot \frac{w_1}{w_2} l_5,$$

und

$$\frac{l_2}{l_5} = \frac{w_2}{w_5}$$

sind die beiden Ausdrücke gleich.

Der Fehler ist also, wenn sämtliche Grössen in beiden Bestimmungen dieselben sind, genau so gross wie bei der elektrischen Kraft-Bestimmung.

Bei dieser Vergleichung ist aber vorausgesetzt, dass l_5 in beiden Fällen denselben Wert haben kann. l_5 ist in dem einen Fall der einzige Widerstand, der im Stromkreis von E eingeschaltet ist; im anderen Fall ist ausserdem l_2 einzuschalten, und wenn es wieder vorausgesetzt wird, dass der einzuschaltende Widerstand im Ganzen nur $= \vartheta v_2$ sein solle, also $\vartheta v_2 = l_2 + l_5$, so ist $l_5 = \vartheta w_5$.

Ist nun w_5 nur der Widerstand des Elementes so ist ϑw_5 sehr klein, und bei Elementen von geringem Widerstand wird w_5 kleiner als die Widerstände, die uns für gewöhnlich zur Verfügung stehen.

Mehrere Versuche wurden in obiger Weise angestellt, und sehr kleine Widerstände durch Abzweigungen eingeschaltet. Die Grösse K wurde unter Benutzung einer Thermosäule auf ihren zweckmässigsten Wert gebracht, aber die Resultate waren für Elemente von sehr kleinem Widerstand nicht befriedigend. Am Ende wurde für diese Bestimmung eine Aenderung der Schaltung wie sie weiter unten betrachtet werden soll vorgenommen.

Einige weitere Bestimmungen der elektrischen Kraft nach den obigen zwei Methoden sind im Folgenden angegeben.

„l_4“ war ein gewöhnlicher Stöpselrheostat, und „l_5“ ein Normalohm, dessen Zuleitungsdrähte 0,00197 Ohm betragen.

w_1 wurde 10000 Ω, w_2 100 Ω, w_3 etwa 6, w_4 43,7 bis 47,9 w_5 der Widerstand des Elements E.

In l_4 war ein Rheostat, der nur auf zehntel Ohm zu schalten gestattete. Der wahre Wert von l_4 wurde durch Zuschaltung eines etwas grösseren, und danach eines etwas kleineren Widerstandes mit Rücksicht auf zeitliche Aenderungen berechnet.

Die Resultate zeigen eine Abnahme der Grösse $\frac{E}{K}$ bis zu einem gewissen Minimum, und nachher eine Zunahme. Dieses wurde jedesmal beobachtet, wenn die Elemente den ganzen Tag über geschlossen waren. Dies lässt sich vielleicht durch eine Abnahme der elektromotorischen Kraft E erklären, und diese Abnahme ist in dem Stromkreis von grösserer Intensität eine schnellere, während sie im Stromkreis von kleiner Intensität eine viel langsamere ist.

K wurde auch in Volt in folgender Weise gemessen, wobei eine Beobachtung, die mehrere Stunden dauerte, keine merkliche Aenderung in ihrem Wert ergab.

Gleichzeitig mit der unten angegebenen Beobachtung wurde ein kleiner Widerstand ∂w_4 (etwa 0,5 Ohm) verschoben, und der Ausschlag der Nadel beobachtet. Es ist dann

$$i_3 = \frac{K w_1 v_2 - E w_2 v_1}{N}$$

$$\partial i_3 = \frac{K v_2}{N} \partial w_4$$

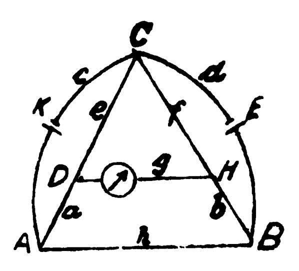
wenn i_3 zuerst gleich Null ist und v_1 ungeändert bleibt.

Zeit	w_4	$\frac{E}{K}\left(=\frac{w_1 v_2}{w_2 v_1}\right)$	l_4	$\frac{E}{K}\left(=\frac{w_1}{w_2}\cdot\frac{l_3}{l_4}\right)$
12h 40m	43,7	0,995948		
3 „ 10 „	47,1	0,995611	100,60	0,995994
3 „ 25 „	47,2	0,995598		
3 „ 36 „	47,2	0,995598	100,61	0,995895
4 „ 11 „	47,2	„		
4 „ 18 „	47,3	0,995590		
4 „ 27 „	47,5	0,995584	100,64	0,995598
4 „ 34 „	47,5	0,995584		

Zeit	w_4	$\frac{E}{K}\left(=\frac{w_2 v_1}{w_2 v_1}\right)$	l_2	$\frac{E}{K}\left(=\frac{w_1}{w_2}\cdot\frac{l_5}{l_4}\right)$
5 h 10 m	47,5	0,995584	100,65	0,995499
5 „ 20 „	47,7	0,995551		
	47,7	„		
5 „ 40 „	47,7	„	100,67	0,995301
	47,8	0,995541		
	47,9	0,995531		
6 „ 22 „	48,0	0,995522		
	47,9	0,995531		
	47,8	0,995541		
	47,6	0,995571		
	47,5	0,995584		
7 „ 50 „	47,3	0,995590	100,64	0,995598

VI.

I. Um die bei der Widerstandsbestimmung erwähnten Schwierigkeiten zu beseitigen, wurde folgende Anordnung getroffen.



Figur XVI.

Der Galvanometer-Zweig wurde nach DH verlegt, und der Verbindungsdraht „h“ zunächst ausgeschaltet. Die Widerstände sind zuerst so ausgeglichen, dass die Nadel auf Null steht, und danach ein kleiner Widerstand in „a“ zugeschaltet, und der Ausschlag beobachtet. Danach ist h durch einen solchen Widerstand zu schliessen, dass die Nadel wieder auf Null kommt. Die Intensität in „g“ ist bei der ersten Beobachtung

$$i_g = \frac{Kev_2 - Efv_1}{N} \qquad (1)$$

worin

$$v_2 = f + b + d$$
$$v_1 = a + e + c$$
$$N = v_1 v_2 g + v_1 f(b + d) + v_2 (a + c)e$$

sind.

Bei der zweiten Einstellung ist

$$i = \frac{E f a_0}{N} \qquad (2)$$

worin „i" die Stromstärke, welche durch Zusatz von dem kleinen Widerstand „a_0" zu „a" in „g" erzeugt wird, bedeutet. Sie kann positiv oder negativ sein je nachdem das a_0 ist.

Wird nun „h" geschlossen, so ist

$$(3)\ i_g = \frac{h\{Ke(b_4 + f + d) - Ef(a_1 + e + c)\} + (dK + cE)\triangle}{N_1}$$

worin $a_1 = a + a_0$, $\triangle = eb - fa$

$$N_1 = hN + h\big(gv_2 + ef + (e+f)(b+d)\big)a_0$$
$$+ g\big(cd(a_1 + b + e + f) + (c+d)(a_1 + e)(b+f)\big)$$
$$+ cd \cdot (a_1 + b)(e+f) + a_1 b(e+f)(c+d)$$
$$+ ef(a_1 + b)(c+d).$$
$$= hN + N_0 a_0 + N_2$$

sind, wenn wir

$$N_0 = h\big(gv_2 + ef + (e+f)(b+d)\big) + g\big((cd + (c+d)(b+f)\big)$$
$$+ cd(e+f) + b(e+f)(c+d) + ef(c+d)$$
$$N_2 = g\big(cd(a+b+e+f) + (c+d)(a+e)(b+f)$$
$$+ cd(a+b)(e+f) + ab(e+f)(c+d)$$
$$+ ef(a+b)(c+d)\big)$$

schreiben.

Aus der S. 74 dargestellten Formel ist die Grösse „w_5" ersichtlich als Teil einer Summe „v_2", deren anderer Summand viel grösser ist. Nach diesem Verfahren aber kommt „d" als einzelnes Glied vor. Der Hauptgrund der Unsicherheit der früheren Methode ist also hier weggeschafft.

Ist i_g in (1) und (3) gleich Null, so ist

$$dK + cE = \frac{hEfa_0}{\triangle}$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$d\frac{fv_1}{ev_2} + c = \frac{hfa_0}{\triangle}$$

oder

$$W = \frac{hfa_0}{\Delta}$$

Dadurch ist W durch zwei Nulleinstellungen bestimmt, und der Ausschlag braucht in (2) nicht beobachtet zu werden, kann aber zur Controlle der elektrischen Kraft oder des Wertes von W dienen.

Der Widerstand „d" ist also bestimmt, wenn wir zwei gleiche Widerstände „c" und „d" voraussetzen, oder wenn ein Widerstand bekannt ist. Mittels eines dritten Elements kann aber c und d einzeln bestimmt werden.

Es seien U_1 U_2 U_3 die Widerstände der drei Elemente, E_1 E_2 E_3 deren elektrische Kraft und W_1 W_2 W_3 die Resultate der Beobachtungen.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} U_1 \frac{E_2}{E_1} + U_2 &= W_1 \\ U_1 \frac{E_3}{E_1} + U_3 &= W_2 \\ U_2 \frac{E_3}{E_2} + U_3 &= W_3 \end{aligned}\right\}$$

wenn E_3 an Stelle E_1 und E_2 gesetzt wird.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$2\frac{U_1}{E_1} + \frac{U_2}{E_2} + \frac{U_3}{E_3} = \frac{W_1}{E_2} + \frac{W_2}{E_3}$$

$$2\frac{U_1}{E_1} = \frac{W_1}{E_2} + \frac{W_2}{E_3} - \frac{W_3}{E_3}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E_1}{E_2} W_1 + \frac{E_1}{E_3} W_2 - \frac{E_1}{E_3} W_3\right)$$

Die beste Anordnung und die Fehlergrösse ergeben sich aus folgender Betrachtung.

Aus obigen Gleichungen (1) und (3) ist

$$(1)\quad \frac{\delta}{\alpha} N = Ke(b+f+d) - Ef(a+e+c)$$

und

$$(3)\quad \frac{\delta}{\alpha} N_1 = h(Ke(b+f+d) - Ef(a_1+e+c) + (dK+cE)\triangle$$

worin $\frac{\delta}{\alpha}$ ihre frühere Bedeutung hat.

Daraus ist

$$\frac{\delta}{\alpha E}\sqrt{N_1^2 + N^2 h^2} = -hfa_0 + \left(d\frac{K}{E} + c\right)\triangle$$

oder

$$d\frac{K}{E} + c = \frac{hfa_0}{\triangle} + \frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{1}{E\triangle}\sqrt{N_1^2 + h^2 N^2}.$$

Gegeben sind hier K, E, c, d, v_1, v_2, i; c und d sollen die Widerstände der Elemente allein sein.

Nach (1) ist

$$e = \frac{Ev_1}{Kv_2} f.$$

Nach (2) ist

$$a_0 = \frac{iN}{Ef}$$

daraus folgt

$$a = v_1 - c - \frac{Ev_1}{Kv_2} f$$
$$b = v_2 - d - f$$
$$a_1 = a + a_0$$

$$\triangle = f\left(\frac{Ev_1}{Kv_2}(v_2 - d - f) - \left(v_1 - c - \frac{Ev_1}{Kv_2} f\right) - a_0\right)$$
$$= f\left\{\left(\frac{E_1}{K_2} - 1\right)v_1 + \left(c - \frac{Ev_1}{Kv_2} d\right) - a_0\right\}$$

Nach (3):

$$h = \frac{dK+cE}{iN}\left\{\left(\frac{E}{K} - 1\right)v_1 + \left(c - \frac{Ev_1}{Kv_2} d\right)\right\} f - \left(c + \frac{K}{E} d\right)$$
$$= \frac{dK+cE}{iN}\left\{\left(\frac{E}{K} - 1\right)v_1 + \left(c - \frac{Ev_1}{Kv_2} d\right) - a_0\right\} f.$$

Der relative Fehler wird:

$$\frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{1}{Ehfa_0} \sqrt{N_1^2 + h^2 N^2}$$

$$= \frac{\delta}{\alpha i} \sqrt{1 + \frac{N_1^2}{h^2 N^2}}$$

Wir haben also $\frac{N_1}{hN}$ zu einem Minimum zu machen. In N ist nur „f" noch frei wählbar.

Nun ist

$$\frac{N_1}{hN} = 1 + \frac{N_0 a_0 + N_2}{hN}$$

und darin ist

$$N_0 = h\left(gv_2 + (1 + \frac{Ev_1}{Kv_2})\, v_2 f - f^2\right) + g\,(v_2 (c + d) - d^2)$$

$$+ \left(1 + \frac{Ev_1}{Kv_2}\right)(v_2 (c + d) - d^2)\, f - (c + d)\, f^2.$$

$$N_2 = g\left(v_1 v_2 (c + d) - v_1 d^2 - v_2 c^2\right)$$

$$+ \left(v_1 v_2 (c + d) - v_1 d^2 - v_2 c^2\right)\left(1 + \frac{Ev_1}{Kv_2}\right) f$$

$$- \left\{\left(1 + \frac{E^2 v_1}{K^2 v_2}\right) v_1 (c + d) - \left(c - d\, \frac{Ev_1}{Kv_2}\right)^2\right\} f^2.$$

Nun ist

$$\frac{N_0 a_0}{hN} = \frac{N_0 i}{Efh}$$

Also

$$\frac{N_1}{hN} = 1 + \frac{N_0 a^0 + N_2}{hN}$$

$$= 1 + \frac{i}{E}\left\{\frac{gv_2}{f} + \left(1 + \frac{Ev_1}{Kv_2}\right) v_2 - f\right\} + \frac{N_2}{hN}$$

Darin sind die weiteren Glieder von $N_0 a_0$

$$+ g\,(v_2 (c + d) - d^2) + \cdots\cdots$$

gegen die in N_2 vorkommenden

$$g\,(v_1 v_2 (c + d) - v_1 d^2 - v_2 c^2) + \cdots$$

vernachlässigt.

Unter Vernachlässigung der kleinen Grössen erhalten wii endlich einen Ausdruck der Form:

$$\frac{N_1}{hN} = 2 + \frac{A}{f} - Bf + \cdots$$

Also f muss möglichst gross gewählt werden. Der grösste Wert von f ist $f = v_2 - d$, wobei $b = 0$ zu setzen ist.

Ist z. B. $K = 2{,}019$, $\frac{E}{K} = 0{,}995$, $g = 6$, $c = d = 0{,}02$, $v_1 = 10000$, $v_2 = 100$, $b = 0$, $a_0 = 5$, so ist f 99,98.

Daraus ergiebt sich

$$a = \text{etwa } 520.$$

$$N = g v_1 v_2 + \left(v_2 + \frac{E}{K} v_1\right) v_1 f - \left(1 + \frac{E^2}{K^2} \frac{v_1}{v_2}\right) v_1 f^2 = 6.10^6$$

$$\triangle = f \left\{ \left(\frac{E}{K} - 1\right) v_1 + \left(c - \frac{E v_1}{K v_2} d\right) - a_0 \right\} = \text{etwa } 4500$$

$$h = \frac{\left(d \frac{K}{E} + c\right) \triangle}{f a_0} = 0{,}36$$

$$N_1 = 24.10^6$$

und der relative Fehler

$$= \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{1}{E h f a_0} \sqrt{(24.10^6)^2 + (0{,}36)^2 (6.10^6)^2}$$

$$= 4.10^{-9} \frac{6.10^6.4}{2.0{,}36.100.5}$$

$$= 0{,}0002 \text{ oder } 0{,}02 \text{ Prozent.}$$

---

2. Das Ergebnis einiger solcher Bestimmungen ist unten angegeben. Bei solchen kleinen Werten von „h“ geht aber, wenn E und. K sehr verschieden sind, ein starker Strom durch

AB. Ist dies der Fall, so darf man nicht annehmen, dass die elektrischen Kräfte E und K ungeändert bleiben. Es ist also nötig, entweder „h" grösser zu wählen, oder nur momentan zu schliessen.

Der Widerstand „d" eines Accumulators wurde gemessen. Als „h" diente ein gespannter Draht mit einem kleinen vorgeschalteten Widerstand. Die Accumulatoren wurden zuerst bei der angegebenen Intensität geschlossen, und die Galvanometernadel auf 0 eingestellt. Danach wurde ein Zusatzwiderstand in „a" eingeschaltet, und „h" einen Augenblick geschlossen. Bewegte sich jetzt die Nadel in der Richtung des der Gleichung (2) entsprechenden Ausschlages, so wurde „h" zu gross. Auf diese Weise konnte man „h" sehr scharf einstellen ohne eine Aenderung der Intensität in „E" zu bewirken.

Bei $e = 10000$, $a = 446,3$, $a_0 = +1$, $f = 100$, $b = 5$ ergab das Mittel mehrerer Versuche $h = 1,792$.

Daraus ist $\triangle = 5270$

$$W = \left(d \frac{K}{E} + c\right) = 0,340038,$$ oder wenn $c = d$ angenommen wird $d = 0,017047$.

Es zeigt sich daraus, dass dieses Verfahren für sehr kleine Widerstände auch brauchbar ist.

Zum Schluss möchte ich dem Herrn Prof. Dr. Feussner für die Anregung zu dieser Arbeit, und für die hülfreiche Leitung und Unterstützung bei ihrer Ausführung, sowie dem Direktor des hiesigen Phys. Instituts Herrn Prof. Dr. Richarz für das freundliche Interesse, das er stets meiner Arbeit entgegen brachte, meinen herzlichen Dank aussprechen.

Inhalt.

Lebenslauf.

Ich, Charles John Seargent, wurde am 19. April 1868 zu Winchester (England) geboren. Meine Schulbildung genoss ich daselbst und bezog 1888 die Universität zu London, wo ich 1894 promovierte als „Bachelor of Science".

Seitdem war ich an dem Gymnasium zn Tunbridge Wells als Oberlehrer thätig. — Ostern 1899 ging ich nach Marburg, um meine Studien fortzusetzen. Dort begann ich eine wissenschaftliche Untersuchung, die ich dann unter dem Titel: „Ueber die Genauigkeit der galvanometrischen Methoden zur Bestimmung der electromotorischen Kraft und des Widerstandes von galvanischen Elementen" als Dissertation bei der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg einreichte. Das Examen rigorosum bestand ich Oktober 1901.

Während meines Marburger Studiums hörte ich die Collegien folgender Herren Professoren und Docenten:

Cohen, Feussner, Hess, Melde (†), Natorp, Richarz, Schaum, Schenk, Schottky, Schmidt, Zincke.

Allen diesen Herren bin ich zu grossem Danke verpflichtet.




Seargent
202864
QC618
S4

